5

Probabilidad

En este capítulo se introduce el concepto de la probabilidad, necesaria para la compresión de temas a desarrollar en capítulos posteriores. Se comienza con el enfoque probabilístico clásico, se sigue con desarrollos algebraicos, para llegar a los teoremas básicos, vinculantes de los índices clínicos entre sí. La mayoría de los conceptos científicos tienen un significado exacto como las cantidades físicas; en cambio, la probabilidad es a menudo asociada con un concepto vago de casualidad, incertidumbre o azar. Muchas veces esta ignorancia oculta la verdadera naturaleza matemática de la teoría de las probabilidades, como una disciplina científica más. Una ciencia exacta con conclusiones obtenidas por la lógica, partiendo de axiomas y principios básicos y con muchas ramificaciones de uso extendido en la práctica. Sin embargo debe dejarse muy en claro que la incertidumbre, es una palabra usada para disimular la ignorancia que se tiene acerca de las múltiples causas que pueden ocasionar un efecto. Y que el azar, o la probabilidad es una forma de cuantificar dicha incertidumbre.

5.1 Introducción

J. J. Bernoulli fue el primero en estudiar este tema en forma sistemática con un enfoque científico. Observando los resultados del lanzamiento de una moneda un número grande de veces, notó que el número de caras y secas tendía a igualarse. Es decir, que la frecuencia relativa de la obtención de caras se acercaba más al número de secas, cuanto mayor era el número de lanzamientos. O bien, ambas frecuencias relativas se parecían cada vez más a 0,5. Otro tanto le ocurría en el lanzamiento de dados: la frecuencia relativa de un as tendía a 1/6. Repitió una y otra vez este tipo de experimentos con monedas, dados y cartas, y siempre llegaba a la misma conclusión. Imaginó haber encontrado un fenómeno más general y así dio comienzo la teoría de probabilidades. Sus resultados teóricos se corresponden razonablemente con la realidad. Sin embargo, debe marcarse siempre una clara distinción entre los resultados empíricos y los teóricos. El uso comenzó en la teoría de juegos de azar, en los albores del siglo XVII, y gracias a estos se hizo popular entre los “geómetras” de aquel entonces. Hoy se la emplea en el campo de los seguros, control de calidad, genética, investigación operativa, mecánica estadística y muchos más.

Probabilidad teórica: *La probabilidad de ocurrencia de un suceso A se define como el cociente entre el número esperado de veces que ocurra un suceso N_A y el número total de casos posibles N*

$$P(A) = N_A / N$$

Esta definición primaria de probabilidad se calcula en forma teórica. Por ejemplo, una moneda tiene dos caras (N = 2) y una sola de ellas es cara (N cara = 1), o sea que la probabilidad de sacar una cara en un lanzamiento, teóricamente es P (sacar cara) = 1/2. Por otra parte, se puede calcular la probabilidad a partir de experimentos, como por ejemplo tirar la moneda para ver si en efecto hay una proporción 0,5 de obtener cara. Esta noción se define como:

Probabilidad empírica: *La probabilidad empírica de ocurrencia de un suceso A es igual a su frecuencia relativa (Fr_A). O sea, el cociente entre el número de veces en que ocurrió el suceso A (F_A) y el número total de experimentos (Ft).*

$$Fr_A = F_A \ / \ Ft$$

La relación entre ambas, fue descripta por Bernoulli en su "Ley empírica del azar" de su famoso libro Ars Conjectandi publicado en 1713 donde se dice: "Si la probabilidad de un suceso es *p* y se realiza un número muy grande N de pruebas, el cociente entre el número de casos favorables obtenidos y el número total de pruebas llega a diferir de *p* en tan poco como se quiera, con tal de tomar a N lo suficientemente grande." Esto es:

$$Fr_A \longrightarrow p \qquad \textit{(si N es grande)}$$

Sin embargo, fue Laplace en su "Teoría Analítica de Probabilidades" (1812) quien le dio una forma más rigurosa definiendo la diferencia en valor absoluto entre ambas probabilidades como menor o igual a un cierto valor positivo ε, haciendo a este tan pequeño como se quiera.

$$\left| Fr_A - P(A) \right| \leq \varepsilon$$

o sea:

$$Fr_A \xrightarrow[N \to \infty]{} P(A)$$

Naturalmente, como un experimento real nunca puede llegar a tener lugar infinitas veces, no se usa la definición clásica de límites sino una aproximación del tipo

$$Fr_A \approx P(A) \qquad \text{(si N es lo suficientemente grande)}$$

Laplace introdujo dos conceptos nuevos en la definición de la probabilidad teórica:

Principio de equiprobabilidad: todos los casos deben tener igual probabilidad de ocurrencia.

Principio de razón suficiente: mientras nada haga sospechar lo contrario, se debe suponer que todos los casos son igualmente probables.

Agregando estos dos principios se completa la definición clásica de probabilidad. En los casos de un dado cargado, una moneda mal balanceada, y otros análogos, no se puede aplicar la definición porque los casos ya no tienen la misma probabilidad. Hay otros casos: por ejemplo, suponiendo un dado tal que tiene dos ases pintados en sus caras pues le falta el número 4, allí habría cinco casos posibles en lugar de seis. Pero si el dado está bien construido la definición se sigue cumpliendo, pues en tal dado todavía hay seis caras con igual probabilidad de ocurrencia y la probabilidad de sacar un as sería 2/6 (2 caras que tienen un as, sobre 6 caras posibles). Mientras que la de sacar 4 sería nula y las demás de 1/6.

CUADRO 5.1 Ejemplos de aplicación

1) De la población de pacientes de un laboratorio se eligieron N = 1000 personas al azar, y se encontrón que 38 de ellas padecían de hipoglucemia. Calcular la probabilidad de que si se escoge un paciente al azar este padezca la enfermedad.

Frecuencia empírica = TE / N = 0,038 → probabilidad teórica = prevalencia

2) Al realizar una comprobación de los valores predichos por la CPK, se encontró que 64 de ellos fueron mal clasificados como positivos y 36 como falsos negativos, del total de 400 historias clínicas analizadas. Calcular la probabilidad de acertar en el pronóstico.

Frecuencia empírica de aciertos = (vp + vn)/ N = (400 – 64 – 36)/ 400 = 0,75 → eficiencia

3) En un curso de Bioestadística hay 30 alumnos, 10 de la carrera de Bioquímica, 15 de Farmacia y 5 de Enfermería. El 70% del total son mujeres y el resto varones. Se escoge uno al azar; hallar la probabilidad de que sea de la carrera de:

a) Bioquímica P(B) = 10 / 30 = 1 / 3 = 0,333
b) Farmacia P(F) = 15 / 30 = 1 / 2 = 0,5
c) Enfermería P(E) = 5 / 30 = 1 / 6 = 0,167
d) ¿Cuál será la cantidad de mujeres M?

P (Mujer) = 0,7 = M / N = M / 30 Por lo tanto M = 0,7. 30 = 21 mujeres

2) En una farmacia ingresan en promedio 60 clientes por día y hacen compras por $ 420. Si se sabe que el 30% se van sin comprar nada. ¿Cuánto vale el gasto per cápita promedio?

La probabilidad de que un cliente compre es del 70%. O sea 0,7 = compradores / total.
Luego el número de compradores diarios en promedio es: 42 clientes = 0,7 . 60, entonces si el ingreso diario es de $ 420, el gasto per cápita será: $ 420/ 42 clientes = $10 por cliente.

Aparecieron más enfoques: Von Mises propuso la noción de “colectivo” para evitar el defecto de la noción clásica: ¿cómo se puede estar seguro en la realidad que todos los casos son equiprobables? Muchos piensan que el principio de razón suficiente es una forma de cerrar los ojos, porque lo correcto sería hacer un experimento para asegurarse de la equiprobabilidad. Este autor propuso considerar una sucesión infinita de sucesos: S1, S2 ... dentro de los cuales se verifica cierto atributo A, tomando el cociente entre el número de veces que se da A y el total, se tiene un valor que tiende a P (A) dentro de un *colectivo* de sucesos. Esta propuesta no tuvo demasiado éxito, comparada con la de Kolgomoroff (1933), que planteó un acercamiento *axiomático* a la noción abstracta de probabilidad y el desarrollo de la teoría como una disciplina matemática basada en la teoría de mediciones.

Hay otro tipo de probabilidades como la llamada *probabilidad subjetiva o intuitiva* que es una cierta evaluación personal de la probabilidad, en lugar de ser teórica o experimental. Por ejemplo, si se desea opinar acerca de la probabilidad de lluvia el día de mañana, cada uno puede emitir una opinión, como 0,9 si hoy está nublado y no aparece el sol, o bien 0,1 si se está en el medio de una magnífica temporada estival. En Medicina, el uso de esta clase de probabilidades se hace cuando el clínico asigna un valor subjetivo de probabilidad a un paciente que está evaluando, la llamada probabilidad Pre-test, y mediante un cálculo obtiene la probabilidad Post-test para evaluar si le conviene hacerle el test al paciente o no. Notar que la misma pregunta puede ser contestada de manera diferente por una misma persona, de acuerdo al momento en que se le haga. Además, diferentes individuos darán diferentes valores subjetivos de probabilidad. Las encuestas de opinión calculan la frecuencia de las respuestas obtenidas, a preguntas subjetivas, para conformar técnicas de mercadeo, propaganda, etc.

Hasta ahora, se han planteado casos con N de tamaño finito, pero si se trabaja con las probabilidades de encontrar un punto en una recta donde cualquier segmento de la misma tendrá infinitos puntos posibles, las definiciones vistas ya no sirven. Si por ejemplo el suceso *A* (unos pocos centímetros) ocurre dentro de una recta de 3 metros, el cociente dado por la fórmula clásica sería una razón irresoluble de infinitos. Por eso se desarrolló el concepto de la *probabilidad geométrica*, como la razón entre el espacio o tiempo, ocupado por los sucesos *A*, y el total. Como ser, si se sabe que el suceso dura 20 s, la probabilidad que ocurra en la hora siguiente se puede obtener con: 20 s / 3600 s = 1/180.

En síntesis, la noción de probabilidad tiene cuatro acepciones básicas:

1) *Clásica* (teórica con casos equiprobables)
2) *Empírica* (práctica con la frecuencia relativa)
3) *Intuitiva* (creencias o mediciones subjetivas)
4) *Axiomática* (modelo matemático)

5.2 Concepto de partición.

Para desarrollar un modelo matemático conviene empezar con la teoría de conjuntos, repasar los conceptos básicos, y luego formular axiomas que permitan definir la noción de probabilidad en forma más precisa. Con los axiomas y ciertas reglas de comportamiento interno se puede definir un álgebra, dentro de un espacio de probabilidades (Álgebra de Boole). A partir de allí se deducen ciertas propiedades interesantes para poder demostrar teoremas como el de Bayes, de uso extendido en el campo del diagnóstico clínico. En cambio, cuando los resultados posibles no son finitos se requerirá de un álgebra especial (σ-álgebra), pero este caso escapa a los contenidos planeados para el presente trabajo.

Las nociones básicas de la teoría de conjuntos fueron vistas en asignaturas anteriores dentro de las matemáticas. Sin embargo, para quien desee repasar estos conceptos se le sugiere ver el Apéndice 1 al final de este capítulo. Análogamente en el Apéndice 2, para repasar la teoría del cálculo combinatorio que se necesita para la obtención del número total de casos, o bien para calcular el número de casos favorables de ocurrencia del suceso A. Lo que interesa por ahora es recordar como se llega al concepto de *partición*, cuyo uso se vio en las Tablas 1.1 a 1.3

Sean n conjuntos $\boldsymbol{C_1, C_2, C_3, ..., Cn}$ pertenecientes al universo $\wp$, se dice que:

1. *La unión de todos ellos pertenece al universo y en el caso particular que resulten ser iguales, se los llama colectivamente exhaustivos.*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{Ci} \subseteq \wp$$

Por ejemplo, si cada marca comercial que se vende en una farmacia es un conjunto Ci, entonces el conjunto de todas las marcas existentes en la misma será el conjunto universo, detallado en el listado completo del *stock* actualizado.

2. *Son mutuamente excluyentes, cuando se excluyen entre sí todos los pares posibles, o sea*

$$\boldsymbol{Ci} \cap \boldsymbol{Cj} = \varnothing \quad \forall \ i \neq j$$

El conjunto de medicamentos fabricado por los Laboratorios Roché: Ci, no tiene ningún elemento en común con el conjunto de los fabricados por Bayer: Cj. Por lo que son excluyentes entre sí.

3. *Forman una partición del universo cuando estos conjuntos son a la vez: mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Esto se puede denotar así: los* ***Ci*** *particionan a* $\wp$ *si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{Ci} \cap \boldsymbol{Cj} = \varnothing \quad \forall \ i \neq j \\ \\ \bigcup_{i=1}^{N} \boldsymbol{Ci} = \wp \end{array}\right\} \quad \textit{Partición de } \wp$$

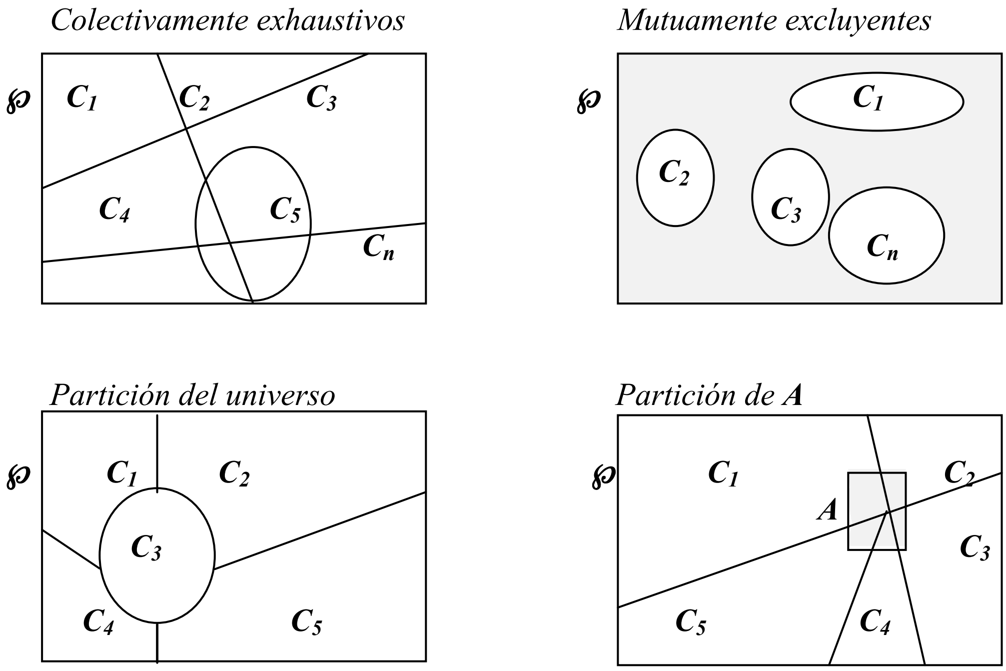
Si se clasifica a la población en: Sanos y Enfermos de una cierta dolencia, se tiene una partición de la misma, pues cada individuo de esta puede estar sano o enfermo únicamente y, además, la unión de sanos y enfermos conforman todos los casos posibles. Lo mismo ocurre si se clasifica a la población en Positivos y Negativos. Así los cuatro casos posibles en la Tabla de la verdad conforman una partición del universo de pacientes.

4. *Particionan al conjunto* ***A*** *cuando a la vez son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, dentro de* ***A****. Esto es, los* ***Ci*** *particionan a* ***A*** *si se cumplen:*

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{Ci} \cap \boldsymbol{Cj} \cap \boldsymbol{A} = \varnothing \quad \forall \quad i \neq j \\ \\ \bigcup_{y=1}^{n} \boldsymbol{Ci} \supset \boldsymbol{A} \end{array}\right\} \quad \textit{Partición de } \boldsymbol{A}$$

Si se toma el subconjunto: enfermos de gripe de la población de Posadas. Este se puede particionar con la condición de: Medicado – No medicado, pues ambos casos son mutuamente excluyentes entre sí y colectivamente exhaustivos para el conjunto de engripados. El conjunto de resultados positivos está particionado por los dos conjuntos: Sano y Enfermo, lo mismo que el conjunto de resultados negativos. Estos cuatro casos se visualizan mejor en el Gráfico 5.1 siguiente:

Gráfico 5.1: Diagramas de Venn para el concepto de partición



5.3 Modelo Axiomático

Para desarrollar un modelo axiomático de probabilidad conviene definir primero una serie de conceptos, para poder usar un idioma común.

. *Elemento:* es uno de los resultados posibles de la prueba clínica o experimento. A veces se lo llama dato o resultado. Tiene el mismo significado que el visto en teoría de conjuntos.

. *Suceso:* es un conjunto de resultados obtenidos en una serie de pruebas. Se denomina también acontecimiento, evento o muestra (en el sentido estadístico del término).

. *Suceso imposible*: cuando se sabe que no puede ocurrir, se lo denota con ***0***.
. *Suceso seguro*: cuando se tiene la certeza que ocurrirá, se lo denota con ***S.***
. *Suceso elemental*: está compuesto por un solo elemento, o sea, una muestra simple.

. *Tamaño*: el tamaño de un suceso es la cantidad de sus elementos componentes. Equivale al concepto ya visto de tamaño muestral.

. *Espacio Muestral*: está formado por el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Se lo llama también: espacio de probabilidad. Se corresponde con el suceso seguro.

La tarea fundamental a la que se dedica el bioquímico es efectuar análisis de laboratorio para ayudar a efectuar un diagnóstico correcto en los pacientes. Sea el caso de una enfermedad cualquiera, como ser el SIDA, empleando diversas técnicas de laboratorio, junto con revisiones corporales del paciente, se puede llegar a uno de dos diagnósticos:

A: luego de efectuarle todos los estudios se concluye que el paciente está infectado;
B: luego de efectuarle todos los estudios se concluye que el paciente no está infectado.

Esos dos serían los resultados posibles o *sucesos,* no importa el camino seguido para realizar tal diagnóstico. Habrá un conjunto de análisis diferentes, en la batería de análisis, los resultados finales serán ***A*** o ***B***. Es evidente que si se hace el estudio y se observa paso a paso el camino seguido, se podrá determinar la serie de evidencias que condujeron al diagnóstico final. O sea, se podrá verificar uno de los dos sucesos. Ahora bien, es imposible que ocurran ambos sucesos a la vez, esto es ***A*** y ***B*** debe ser igual al suceso ***0.*** Pero es seguro que ocurrirá uno de ambos, entonces ***A*** o ***B*** coincide con ***S***. Por su parte, el complemento de ***A*** es ***B*** y viceversa. Análogamente, un cliente que entra a la farmacia puede hacer dos cosas: comprar algo (***A***) o no comprar (***B***). En resumen:

Un conjunto de sucesos observables que presenta una estructura de Álgebra de Boole para las leyes de composición interna: conjunción, intersección y complemento, se la denomina Álgebra de Sucesos.

A su vez, un Álgebra de Sucesos siempre puede ser representada por un Álgebra de Conjuntos que es isomorfa a ella. En particular, tomando el conjunto de los números reales $\Re$, se puede definir una aplicación **P** del Álgebra de Sucesos Ψ sobre tal conjunto, $\mathbf{P}: \Psi \rightarrow \Re$ como una *probabilidad* si cumple los tres axiomas siguientes:

1. La probabilidad de que ocurra un suceso ***A*** es siempre positiva o nula

$$\mathrm{P}\,(A) \geq 0$$

2. La probabilidad de que ocurra el suceso seguro es una certeza y vale 1

$$\mathrm{P}\,(S) = 1$$

3. Si dos sucesos son excluyentes, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades individuales

$$\mathrm{P}\,(A \cup B) = \mathrm{P}\,(A) + \mathrm{P}\,(B) \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = 0$$

Definición*: sea un conjunto de sucesos que definen un espacio muestral **S**; la probabilidad de ocurrencia de un suceso **A** perteneciente al mismo es un número adimensional que cumple con los tres axiomas anteriores.*

Debe destacarse que no se ha hecho mención en la definición de la probabilidad axiomática a la manera en que se obtendrá la cantidad P (***A***). Se puede usar una forma intuitiva de valorarla, o realizar un experimento para medir la empírica, o bien, hacer deducciones teóricas para su cálculo. Todas las maneras son igualmente válidas para este enfoque algebraico. La mejor aproximación a la realidad que se obtenga dependerá del modo de calcularla, y no del modelo matemático usado. Mediante este modelo axiomático o algebraico se pueden traducir a símbolos las relaciones entre acontecimientos para ver la aplicabilidad de los conceptos teóricos en la vida real. La idea central es que todo modelo estadístico debe ceñirse a la realidad lo más posible y no a la inversa. El peligro fue advertido por Einstein cuando afirmó "... los científicos suelen ver la realidad a través de los anteojos que les pone la teoría en la que creen...".

Para analizar la consistencia entre probabilidad y frecuencia relativa se pueden ver:

. Cuando se tenga la certeza que ocurrirá un resultado al hacer una prueba, entonces en todos los casos se verificará la ocurrencia del suceso en cuestión. Por lo tanto, la frecuencia de casos favorables coincidirá con la frecuencia total, y así la frecuencia relativa será la unidad.

$$\mathrm{Fr}_A = \mathrm{F}_A \;/\; \mathrm{Ft} = 1 \approx \mathrm{P}\,(\boldsymbol{A}) = \mathrm{P}\,(\boldsymbol{S})$$

. Cuando se tenga la certeza que nunca ocurrirá un resultado al hacer una prueba, entonces el número de casos favorables será nulo, y así anulará la frecuencia relativa.

$$\mathrm{Fr}_A = \mathrm{F}_A \;/\; \mathrm{Ft} = 0 \approx \mathrm{P}\,(\boldsymbol{A}) = \mathrm{P}\,(\boldsymbol{0})$$

De los dos puntos anteriores se deducen de inmediato los dos valores extremos de frecuencia relativa o probabilidad.

$$0 \leq \mathrm{Fr}_A \approx \mathrm{P}\,(\boldsymbol{A}) \leq 1$$

Cuando dos sucesos se excluyan mutuamente, la frecuencia relativa de ambos ocurriendo simultáneamente será nula ($\mathrm{F}_{AB} = 0$), y por lo tanto:

$$\mathrm{Fr}_{A\,o\,B} = (\mathrm{F}_A + \mathrm{F}_B + \mathrm{F}_{AB}) \;/\; \mathrm{Ft} = (\mathrm{F}_A \;/\; \mathrm{Ft}) + (\mathrm{F}_B \;/\; \mathrm{Ft}) = \mathrm{Fr}_A + \mathrm{Fr}_B \approx \mathrm{P}\,(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$$

Con los tres puntos anteriores se puede denotar la *consistencia* entre el modelo teórico de la probabilidad axiomática y las probabilidades empíricas relacionadas. El símbolo ≈ fue usado en el sentido de la ley empírica de Bernoulli.

5.3.1 Propiedades derivadas

Al desarrollar los tres axiomas anteriores, deduciendo propiedades a partir de ellos, se va armando la teoría de probabilidades.

1) Inclusión de sucesos entre sí:

$$\text{si } \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \text{ entonces } \mathrm{P}\,(\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{P}\,(\boldsymbol{B})$$

Lo que se demuestra con $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \nabla \boldsymbol{A})$ y como estos dos conjuntos no tienen elementos comunes, se les puede aplicar el axioma 3, así: $\mathrm{P}\,(\boldsymbol{B}) = \mathrm{P}\,(\boldsymbol{A}) + \mathrm{P}(\boldsymbol{B} \nabla \boldsymbol{A})$. Y como toda probabilidad es siempre positiva o nula, se deduce que la P (***B***) es siempre mayor, o a lo sumo igual que la P (***A***). Por ejemplo, el conjunto ***A*** (10 personas) de los internados por fracturas en un pabellón del hospital, es un subconjunto (***B***) de todos los internados que hay en el mismo (20 personas), y por lo tanto $\mathrm{P}\,(\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{P}\,(\boldsymbol{B})$. Si en el hospital hay 100 internados en total se pueden estimar: $\mathrm{P}\,(\boldsymbol{A}) = 10/100 = 0{,}1 \leq \mathrm{P}\,(\boldsymbol{B}) = 20/100 = 0.2$ con lo que se muestra esta propiedad de inclusión que tienen los subconjuntos.

2) Unión de varios sucesos excluyentes:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = P(\boldsymbol{C_1}) + P(\boldsymbol{C_2}) + P(\boldsymbol{C_3}) + \ldots + P(\boldsymbol{C_n}) \iff \boldsymbol{C_i} \cap \boldsymbol{C_j} = \boldsymbol{0} \quad \forall\, i \neq j$$

Para demostrarlo basta hacer substituciones, se toman los n-1 conjuntos $\boldsymbol{C_2} \ldots \boldsymbol{C_n}$ y a su unión se la llama ***B***, así quedan dos conjuntos el $\boldsymbol{C_1}$ y el ***B*** a los que se le puede aplicar el axioma 3, resultando la suma de sus respectivas probabilidades. Luego a B se le descompone en $\boldsymbol{C_2}$ y el resto ***R***, y se hace lo mismo. Así queda la suma de las probabilidades de los dos primeros conjuntos más la de la unión del resto. Procediendo análogamente se llega a demostrar la propiedad anterior. Por ejemplo, sean los cuatro sucesos posibles al efectuar un diagnóstico:

VP: verdadero positivo ***FP***: falso positivo ***VN***: verdadero negativo ***FN***: falso negativo

Como los sucesos son mutuamente excluyentes entre sí, su unión equivale al universo, entonces:

$$P(\cup\, Ci) = P(\boldsymbol{VP}) + P(\boldsymbol{FP}) + P(\boldsymbol{VN}) + P(\boldsymbol{FN}) = P(\boldsymbol{S}) = 1$$

3) *Sucesos complementarios:*

$$P(\boldsymbol{A}) = 1 - P(\overline{\boldsymbol{A}})$$

Sean dos sucesos complementarios $\boldsymbol{A}$ y $\overline{\boldsymbol{A}}$, su unión es el universo y su intersección es el conjunto vacío, o sea, son excluyentes entre sí, por lo que se le puede aplicar los axiomas 1 y 3

$$P(\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}}) = P(\boldsymbol{S}) = 1 = P(\boldsymbol{A}) + P(\overline{\boldsymbol{A}})$$

De donde se deduce de inmediato la propiedad anterior. Por ejemplo, la probabilidad de estar sano será igual a uno menos la prevalencia, y la probabilidad de resultar positivo será igual a uno menos la probabilidad de resultar negativo. Por ejemplo, la prevalencia de una enfermedad en la población se calcula como el cociente entre el número de enfermos y el total de individuos que componen la población: p = TE / N. El complemento de esta probabilidad será q =1 – p, la cual se calcula con: q = 1 – (TE / N) = (N – TE) / N = TS / N. O sea la probabilidad de estar sano.

En el caso de complementos relativos hay otra propiedad expresada por:

$$P(\boldsymbol{B} \nabla \boldsymbol{A}) = P(\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}) = P(B) - P(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A})$$

De la figura se puede ver que el conjunto ***B*** está formado por dos conjuntos excluyentes, tales que:

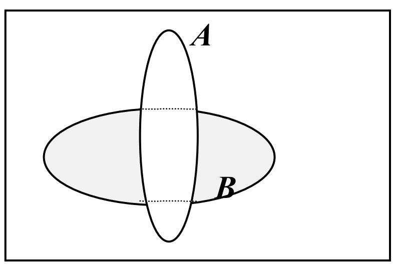
$$(\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}) \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$$

El complemento relativo y la intersección a su vez son

$$(\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}) \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$$

Se aplica el axioma 3 y resulta

Gráfico 5.2



$\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}$ □

$P(\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}) + P(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}) = P(\boldsymbol{B})$ luego es : $P(\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}) = P(B) - P(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A})$

Por ejemplo, sea ***A*** el conjunto de todas las embarazadas que concurren al hospital, luego su complemento será el conjunto de todas las mujeres que no están embarazadas que concurren al hospital. Sea ***B*** el conjunto de todas las personas que vienen al hospital a tratarse de enfermedades venéreas. Entonces, el complemento relativo $P(\boldsymbol{B} \nabla \boldsymbol{A}) = P(\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}})$ es la probabilidad de encontrar un mujer que concurra por una enfermedad venérea y que no esté embarazada.

4) Unión de dos sucesos cualesquiera:

Sean dos sucesos ***A*** y ***B***, pertenecientes al espacio de probabilidades ***S***; la probabilidad de la unión de ambos es la suma de sus probabilidades individuales, menos la de su intersección.

$$P(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = P(\boldsymbol{A}) + P(\boldsymbol{B}) - P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$$

Esto es una generalización del axioma 3, al caso general, cuando los conjuntos no son excluyentes, como en la figura del Gráfico 5.2 anterior. Puede verse que el suceso ($\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$) es la unión de tres sucesos mutuamente excluyentes entre sí, a saber, la intersección entre ambos y los dos complementos relativos. O sea,

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}) \cap (\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) = \boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$$

Aplicado el axioma 3 generalizado, resulta:

$P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) + P(\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}) + P(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) = P(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$ Reemplazando resulta:

$P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) + \{ P(\boldsymbol{B}) - P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})\} + \{ P(\boldsymbol{A}) - P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})\} = P(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$ O sea,

$$P(\boldsymbol{B}) + P(\boldsymbol{A}) - P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = P(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$$

Usando el mismo ejemplo anterior sería: $P(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$ la probabilidad del conjunto formado por mujeres embarazadas o que tengan enfermedades venéreas, la que será igual a la suma de la probabilidad de que una mujer está embarazada $P(\boldsymbol{A})$, más la probabilidad de que una mujer tenga una enfermedad venérea $P(\boldsymbol{B})$, menos la probabilidad del conjunto formado por las mujeres embarazadas y con enfermedades venéreas $P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$.

5) Particiones de sucesos:

Sean *n* sucesos pertenecientes al mismo espacio muestral ***S***, tales que particionan al suceso ***A*** (ver Gráfico 5.2), entonces se cumple que:

$$P(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{Ci}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\boldsymbol{Ci} \cap \boldsymbol{Cj}) \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \quad \forall \quad i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{Ci} \supset \boldsymbol{A} \end{cases}$$

Si se piensa que el suceso $\boldsymbol{A}$ está particionado por los $\boldsymbol{Ci}$, entonces queda dividido en *n* pedazos del tipo: ($\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{Ci}$) , que son sucesos mutuamente excluyentes entre sí y, a su vez, su unión total debe ser igual al suceso $\boldsymbol{A}$; entonces aplicando el axioma 3 generalizado se demuestra la expresión anterior. Por ejemplo, el suceso $\boldsymbol{A}$ resultar positivo está particionado por los sucesos $\boldsymbol{C_1}$: sano y $\boldsymbol{C_2}$: enfermo. Entonces:

$$P(\boldsymbol{A}) = \sum P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{Ci}) = P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C_1}) + P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C_2}) = P(\boldsymbol{FP}) + P(\boldsymbol{VP}) = (fp/N) + (vp/N) = TP/N$$

6) Conteo de resultados:

Sea una prueba clínica con un total de N resultados posibles $\boldsymbol{C_1}, \boldsymbol{C_2} \ldots \boldsymbol{C_n}$ que forman el espacio muestral $\boldsymbol{S}$. Entonces cada experimento tendrá una probabilidad individual dada por P ($\boldsymbol{Ci}$). Sea $\boldsymbol{R}$ un suceso cualquiera formado por *r* resultados, entonces puede ser escrito con:

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{i=1}^{r} \boldsymbol{Ci} \quad \text{Y de allí resulta} \quad P(\boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{r} P(\boldsymbol{Ci}) \quad \text{por la propiedad anterior.}$$

Extendiendo el caso al universo $\boldsymbol{S}$ al tomar todos los resultados posibles será:

$$P(\boldsymbol{S}) = \sum_{i=1}^{N} P(\boldsymbol{Ci}) = 1$$

Para el caso particular de *resultados igualmente probables* la expresión se reduce a:

$$P(\boldsymbol{C_1}) = P(\boldsymbol{C_2}) = P(\boldsymbol{C_3}) = \ldots = P(\boldsymbol{Cn}) = 1/N$$

7) Conclusión:

De las expresiones del punto anterior se sabe que la P ($\boldsymbol{R}$) es la suma de las probabilidades de cada uno de los resultados que verifican $\boldsymbol{R}$, y si estos a su vez son equiprobables resulta:

$$P(\boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{r} P(\boldsymbol{Ci}) = \underbrace{(1/N) + (1/N) + \ldots + (1/N)}_{r \text{ veces}} = N_{\boldsymbol{R}} / N = r / N$$

o sea,

$$P(\boldsymbol{R}) = N_{\boldsymbol{R}} / N$$

Entonces, la probabilidad P ($\boldsymbol{R}$) de un evento cualquiera $\boldsymbol{R}$ es igual al número $N_{\boldsymbol{R}}$, de elementos de $\boldsymbol{R}$, dividido por el número total de elementos N. Lo que se parece mucho a la definición clásica de probabilidad; sin embargo existe una diferencia fundamental:

. En el enfoque de la probabilidad axiomática, la equiprobabilidad es un *supuesto* usado para establecer las probabilidades de los resultados de un experimento cualquiera.

. En el enfoque de la probabilidad clásica, la equiprobabilidad es una *conclusión lógica* y es usada de hecho para *definir* a la misma.

5.3.2 Aplicaciones

a) Si se lanza una moneda al aire, los resultados posibles son cara y seca, ambos con una probabilidad igual a 0,5. O sea, cumplen las condiciones anteriores. Ahora, si se lanza la misma moneda dos veces al aire, los casos posibles son ***S*** { cc , cs , sc , ss } o sea, 4 casos igualmente probables, cada uno con un valor de probabilidad de ¼ . Un evento cualquiera como por ejemplo, ***R*** { obtener una seca en el primer lanzamiento } = { sc , ss } que tendrá un valor de probabilidad dado por P (***R***) = ¼ + ¼ = ½ = N_R / N = 2/4.

b) Si se lanza un dado al aire, hay seis resultados posibles, equiprobables (P = 1/6). Pero si se lanza el mismo dado dos veces, ahora el espacio muestral estará formado por 36 elementos (resultados posibles) ***S*** { (1,1) (1,2) (1,3) .... (6,5) (6,6) }todos igualmente probables (P = 1/36) Un evento cualquiera ***R*** { (3,3) (3,4) (4,3) }tendrá una probabilidad P (***R***) = 3/36 = 1/12. Otro suceso ***M*** {obtener dos ases }= { (1,1) } tendrá P (***M***) = 1/36.

c) Se lanza una moneda cargada al aire donde la probabilidad de cara p = 1/3 y la de seca q = 2/3 entonces se cumple p + q = 1 . Ahora se la lanza de nuevo y se genera un espacio muestral dado por ***S*** { cc , cs , sc , ss }, con P (cc) = p^2 ; P (sc) = P (cs) = p.q y P(ss)= q^2. Se cumple que P (***S***) = $p^2 + p.q + q.p + q^2 = (p+q)^2 = 1$. Lo anterior se cumple pues la ocurrencia de un resultado no incide en el siguiente ni es influenciado por el anterior.

d) Se efectúa un diagnóstico a partir de los análisis clínicos del paciente los resultados posibles son (+) con una probabilidad p y (-) con una probabilidad q. Se cumple la relación p + q = 1 pues p = TP/N y q = TN/ N, de allí p + q = (TP + TN) /N = 1. Se efectúa otro diagnóstico a otro paciente, las probabilidades p y q se mantienen iguales y constantes y el espacio muestral formado por este segundo caso es ***S*** { (+ +) (+ -) (- +) (- -) } con probabilidades análogas a las del caso anterior. (TP: total de Positivos ; TN : Total de Negativos)

e) Ocurre un nacimiento, la probabilidad que sea varón es igual a la de mujer y vale 0,5. Si son mellizos hay cuatro casos posibles, en forma análoga al ejemplo (a) de más arriba.

f) En un concurso para auxiliar de la cátedra de Bioestadística se presentan 3 candidatas. La primera: *A* por ser profesional tiene dos veces más posibilidades de ganar que una alumna avanzada *B*. Y esta a su vez el triple de ganarle a *C* que es de otra carrera. Se pide calcular las respectivas posibilidades de ganar y la probabilidad de que *A* no gane.

Si P(*C*) = p entonces P(*B*) = 3 P(*C*) = 3 p y P(*A*) = 2 P(*B*) = 6 p

El suceso seguro es que alguna de las tres va a ganar: 1 = P(*A*) + P(*B*) + P(*C*) = 6p + 2p + p = 9p
Y no es posible que gane más de una, por lo tanto los tres sucesos son mutuamente excluyentes.

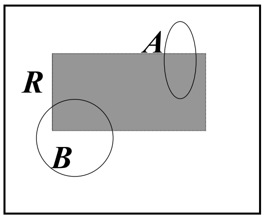
De donde se obtiene p = 1/9 y con eso se pueden obtener: P(*A*) = 6/9 ; P(*B*) = 2/9 y P(*C*) =1/9

La probabilidad de que no gane *A* es igual a la de que ganen *B* o *C*. Esto es:

$P(\bar{A}) = 1 – P(A) = 1 – 6/9 = 3/9 = 1/3 = P (B \cap C) = P(B) + P(C) = 2/9 + 1/9$

g) Se fabrica un medicamento con 11,9 g de sulfato ferroso ($SO_4Fe \cdot 7\ H_2O$) en 100 ml. y el resto excipientes como sacarosa, sorbitol y ácido cítrico con agua triple destilada. Las normas establecen una tolerancia para el sulfato de $\pm$ 2,1 g/100ml, junto con otras especificaciones para los demás componentes. El farmacéutico a cargo del control de calidad sabe, por su larga experiencia, que el 1% de lo producido se rechaza por superar el límite y el 2% por no llegar al valor mínimo en el caso del sulfato. Además, un 4% se rechaza por no cumplir las restantes especificaciones. Si tiene que inspeccionar 10.000 unidades: ¿cuál será el número total de unidades que espera aceptar? Sea el esquema siguiente:

S: lote de 10.000 unidades fabricadas
A: unidades rechazadas por sobrepasar límite de sulfato
B: unidades rechazadas por no llegar al límite de sulfato
R: unidades rechazadas
X: unidades aceptadas $= \overline{R}$
C: unidades rechazadas por otras causas



$R = C \cup (B \cap R) \cup (A \cap R)$ (sombreado)

$$P(\overline{X}) = 1 - P(X) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \{ P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \}$$

$$P(X) = 1 - \{ P(A) - P(A \cap C) \} - \{ P(B) - P(B \cap C) \} - P(C)$$

$$P(X) = 1 - \{ P(A \cap C) \} - \{ P(B) - P(B \cap C \} - P(C)$$

De los datos del problema surgen:

$P(C) = 4\% = 0{,}04 \qquad P(A \cap \overline{C}) = 1\% = 0{,}01 \qquad P(B \cap \overline{C}) = 2\% = 0{,}02$

De allí es $P(X) = 1 - 0{,}01 - 0{,}02 - 0{,}04 = 0{,}93$. O sea un 93% de unidades aceptadas, lo que significa N. X = 9.300 unidades aceptadas.

5.3.3 Índices clínicos como probabilidades

Sean los cuatro sucesos posibles al efectuar un diagnóstico:

Tabla 5.1: Eventos posibles al realizar un diagnóstico o Tabla de diagnóstico

	Diagnóstico verificado		
Test clínico	Enfermo: C_1	Sano: C_2	Total
(+)	***VP***: verdadero positivo	***FP*** : falso positivo	***TP*** : de Positivos
(-)	***FN*** : falso negativo	***VN*** : verdadero negativo	***TN*** : de Negativos
Total	***TE*** : Total Enfermos	***TS***: Total Sanos	***N*** : Total pacientes

La Tabla 5.1 es un Diagrama de Venn, donde los sucesos sano ($\boldsymbol{C_2}$) y enfermo ($\boldsymbol{C_1}$) particionan al universo, igual que positivo y negativo. Y a su vez, los cuatro sucesos posibles ***VP, FP, VN, FN*** también particionan al universo. Notar que si el suceso es ***VP*** su valor observado o medido es la frecuencia (vp) usada en la Tabla 1.1, y lo mismo con los tres casos restantes.

.

$\boldsymbol{FP} = (\boldsymbol{C_2} \cap \boldsymbol{TP})$ $\quad$ $\boldsymbol{VP} = (\boldsymbol{C_1} \cap \boldsymbol{TP})$ $\quad$ $\boldsymbol{FN} = (\boldsymbol{C_1} \cap \boldsymbol{TN})$ $\quad$ $\boldsymbol{VN} = (\boldsymbol{C_2} \cap \boldsymbol{TN})$

P (***VP***) = número de casos posibles / número total de casos = vp / N – es una probabilidad

P ($\boldsymbol{C_1}$) = TE / N = p es una probabilidad llamada la *prevalencia* de la enfermedad.

Por lo tanto el cociente entre ambas probabilidades será: *Sensibilidad* = vp / TP = P (***VP***) / P ($\boldsymbol{C_1}$) De donde se deduce que la sensibilidad es un cociente de probabilidades. Análogamente para la especificidad E = vn / TS pues:

P (***VN***) = vn / N y P ($\boldsymbol{C_2}$) = TS / N es igual al complemento de la prevalencia; o sea que el cociente entre ambas probabilidades será la *Especificidad* = P (***VN***) / P ($\boldsymbol{C_2}$)

Puede verse que los índices clínicos principales S y E son en realidad un cociente de probabilidades, cuyo significado se explicará mejor en el capítulo siguiente. Lo mismo ocurre con los valores predictivos. En efecto:

P (***TP***) = TP / N y por su lado P(***TN***) = TN / N

VPP = vp / TP = P (***VP***) / P (***TP***) = (vp / N) / (TP / N) = vp / TP

VPN = vn / TN = P (***VN***) / P (***TN***) = (vn / N) / (TN / N) = vn / TN

Por su parte la Eficiencia (A) se puede obtener con la unión de los dos tipos de éxitos:

P (n º de éxitos) = A = P($\boldsymbol{VP} \cup \boldsymbol{VN}$) = P (***VP***) + P (***VN***) = (vp / N) + (vn / N) = (vp + vn) / N

En resumen, mientras que la prevalencia y eficiencia son probabilidades simples y directas, los índices tales como la sensibilidad, especificidad y valores predictivos son un cociente de probabilidades directas.

5.4. Odds

Este concepto, que no tiene aún una traducción del idioma inglés, se puede definir como un cociente de probabilidades de la manera siguiente:

Odds: es el cociente entre la probabilidad de ocurrencia de un suceso A y la de su complemento.

$$\text{Odds} = P(\boldsymbol{A}) / P(\overline{\boldsymbol{A}}) = P(\boldsymbol{A}) / [1 - P(\boldsymbol{A})]$$

Se pueden definir diferente tipos de Odds como los de Enfermos o Sanos con:

Odds de enfermos = P(***Enfermo***) / P(***Sano***)

Si se considera a la población total, entonces la Prevalencia de la enfermedad es la cantidad de enfermos que esta tiene y la relación anterior se puede expresar con:

$$\boxed{\text{Odds de enfermos} = \text{Prevalencia} / 1 - \text{Prevalencia}}$$

*Proporción de enfermos: e*s la probabilidad de contraer la enfermedad (Prevalencia).

Se puede encontrar la relación siguiente:

Prevalencia = P(***E***) = TE / N = TE / (TS + TE) = (TE / TS) / [1 + (TE/ TS)]

$$\boxed{\text{Prevalencia} = \text{Odds} / (1 + \text{Odds})}$$

Esto ya fue presentado en la Tabla 4.3 para el concepto de riesgo, pero ahora se lo explica desde el punto de vista de las probabilidades para el caso particular de que el riesgo sea contraer una enfermedad cualquiera. Para entender el significado clínico de estos conceptos se dan algunos ejemplos como sigue:

Caso 1) Si la probabilidad de enfermarse (Prevalencia) es del 80%, entonces la probabilidad de no enfermarse (1 – Prevalencia) será del 20%. Por lo tanto, el Odds de enfermos es 4 a 1, lo que significa que hay 4 chances entre 5 de enfermarse.

Caso 2) Si se sabe que el Odds de enfermedad es de 5 a 1, entonces la prevalencia (o riesgo) se puede calcular como p = 5 / (1 + 5) = 5/6 = 0,83

Caso 3) Si se tiene una sensibilidad del 60% y una especificidad del 80%, se pueden calcular sus respectivos Odds con:

Odds de sensibilidad = S / (1 – S) = 0,6 / 0,4 = 1,5
Odds de especificidad = E / (1 – E) = 0,8 / 0,2 = 4

El producto de ambos Odds será igual a 6. Por su parte, se pueden calcular los Likelihood ratios:

LR+ = S / (1 – E) = 0,6 / (1 – 0,8) = 0,6 / 0,2 = 3
LR- = (1 – S) / E = (1 – 0,6) / 0,8 = 0,4 / 0,8 = 0,5

Entonces, el cociente de ambos Likelihood Ratios es igual al producto de los Odds de sensibilidad y Especificidad. En efecto,

LR+ / LR- = S . E / [(1 –S) (1 – E)] = Odds sensibilidad x Odds especificidad = 6 = Odds Ratio

A este índice se lo denomina Odds Ratio y se lo presentó en el Capítulo 4, se lo puede entender como un cociente entre el producto de los éxitos, dividido el producto de los fracasos.

Caso 4) Si el suceso analizado es la cantidad de fallas cometidas en el diagnóstico se tiene:

Odds de fallas = P (fracasos) / [1 – P(fracasos)] = P(fracasos) / P(éxitos)

Pero la P(fracasos) = (fn + fp) / N y la P(éxitos) = (tn + tp) /N Luego reemplazando y simplificando en la relación anterior se obtiene:

$$\boxed{\text{Odds de fallas = Failure Odds} = (fp + fn) / (tp + tn)}$$

Significa que si se tiene 1 falla en 10 pruebas el FO = 1/9, o bien cuando el FO = 2/8 entonces habrá 2 fallas cada 10 pruebas, o cada 8 éxitos. Se puede tomar a este número como otro índice para calificar la calidad de un diagnóstico.

5.5 Cuadro resumen de los índices clínicos

En el cuadro siguiente se muestra las relaciones teóricas de todos los índices clínicos con los dos índices básicos: sensibilidad, especificidad. Además se clasifica entre aquellos que varían con la prevalencia y los demás:

Cuadro 5.2 Relaciones entre índices clínicos de diagnóstico

Índices clínicos básicos: Parámetros o características principales de un test clínico

Sensibilidad = S = vp / TE
Especificidad = E = vn / TS

Índices clínicos derivados: No dependen de la prevalencia, son otros parámetros del test clínico.

Índice de Youden = Y = S + E –1
Likelihood Ratio de positivos : LR+ = S / (1 – E)
Likelihood Ratio de negativos: LR- = (1 – S) / E

Índices clínicos extrínsecos: Dependen de la prevalencia, son variables del test clínico

Valor Predictivo de Positivos : VPP = vp / TP = S . p / {[(1-p) (1 – E)] + [S .p]}
Valor Predictivo de negativos: NPP = vn / TN = E (1 – p)/ {[E (1-p)] + [p (1 – S)]}
Eficiencia: A = (vp + vn) / N = E (1 – p) + S . p

Efecto de la población en los tests clínicos:

Prevalencia : p = TE / N
Odds de enfermedad: O = p / (1-p) = TE / TS
Odds / (1 + Odds) = Prevalencia ; o bien: p = O / (1 + O)

5.6 Problemas propuestos

1) La probabilidad teórica es exactamente igual a la empírica. **V F**
2) A medida que aumenta N la probabilidad empírica se aproxima mejor a la teórica. **V F**
3) La noción de probabilidad tiene 4 acepciones básicas. **V F**
4) El conjunto universo está formado por todos los casos posibles. **V F**
5) El complemento del conjunto universo es el conjunto elemental. **V F**
6) El conjunto vacío tiene el cero como único elemento. **V F**
7) Un elemento pertenece a un conjunto es lo mismo que decir: está incluido en él. **V F**
8) Si A está incluido en B, entonces son iguales. **V F**
9) Si A está incluido en B, y este se incluye en C, entonces A está incluido en C. **V F**
10) El complemento de A está formado por los del universo que no son A. **V F**
11) La unión de un conjunto y su complemento forman al universo. **V F**
12) Dos conjuntos se dicen excluyentes si no tienen elementos comunes. **V F**
13) La unión del conjunto universo con otro cualquiera es un nuevo universo. **V F**
14) La intersección de un conjunto con el vacío es el mismo conjunto. **V F**
15) La unión de un conjunto con el conjunto vacío es el conjunto elemental. **V F**
16) La intersección de un conjunto con el universo es el mismo conjunto. **V F**
17) La unión de un conjunto con otro más grande es igual al más grande. **V F**
18) Un grupo de conjuntos es colectivamente exhaustivo si es igual al universo. **V F**
19) Un grupo de conjuntos es mutuamente excluyente si lo son todos los pares posibles. **V F**
20) Una partición se forma con un grupo de conjuntos mutuamente excluyentes. **V F**
21) Las combinaciones son el cociente entre variaciones y permutaciones. **V F**
22) Escribir las fórmulas de cálculo de combinaciones, variaciones y permutaciones.
23) Es lo mismo realizar extracciones con y sin reposición en el cálculo combinatorio. **V F**
24) Definir los sucesos: Universo, Vacío y Elemental.
25) Para que un conjunto de sucesos observables sea un Álgebra de Boole debe cumplir ....
26) Los tres axiomas básicos del Álgebra de Probabilidades son: ....
27) Las probabilidades del conjunto vacío y del universo son complementarias. **V F**
28) La probabilidad de la unión de sucesos excluyentes, es igual a la suma directa de: ....
29) Para la partición del universo por un grupo de conjuntos se requiere: ....
30) La relación entre los índices clínicos está dada por la relación: ....

31) Once estudiantes de la Facultad son condenados a muerte y se les concede pedir un último deseo. Cuando el que aprobó Bioestadística nota que tardan 5 minutos en formarlos contra la pared, pide que los ejecuten luego de que los coloquen en el paredón de todas las formas posibles. Explicar porqué salvó a sus compañeros.

32) Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 2 negras, otra contiene 3 blancas y 5 negras; si se extrae una bola de cada bolsa. Hallar la probabilidad de que:

a) ambas sean blancas;
b) ambas sean negras;
c) una blanca y la otra negra.

33) De cuántas formas pueden ordenarse 7 libros en un estante si:

a) es posible cualquier ordenación;
b) tres libros determinados deben estar juntos;

c) dos libros determinados deben estar en los extremos.

34) Una farmacia que hace reparto a domicilio tiene 4 cadetes con moto y llegan 3 pedidos a la vez. ¿De cuántas formas puede el encargado asignar la tarea a los cadetes?

35) Doce estudiantes deben rendir un examen parcial y el profesor tiene 4 temas diferentes para interrogarlos. ¿De cuántas formas diferentes puede hacerlo?

36) Cinco pacientes vienen a efectuarse cinco análisis diferentes al laboratorio de análisis clínicos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse en la fila de espera si se les da libertad para hacerlo? Ver si cambian las cosas si se les da un número por orden de arribo para ser atendidos por el bioquímico.

37) ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse en una fila 3 bioquímicos, 5 farmacéuticos y 4 enfermeros? Ver si cambia el resultado si se sientan en una mesa redonda.

38) Se tiene un mazo de 40 cartas españolas y se pide calcular la probabilidad de que salga:
a) un as; b) una carta de oro; c) una figura; d) un número cualquiera; e) un dos o un tres.

39) En una farmacia hay 5.000 remedios distintos, 1.200 artículos medicinales y 600 productos de perfumería. Si se toma un ítem al azar calcular la probabilidad de que sea: a) un remedio; b) un perfume; c) un artículo medicinal o un perfume.

40) Se fabrica una vacuna contra la gripe que falla en un 2% de los casos si la persona está tomando antibióticos, en un 4% si está haciendo un régimen adelgazante y en un 8% por otras causas diferentes. Si se analizan 5.000 casos: ¿cuál será el número total de curados?

41) Sopa de letras: buscar y marcar las palabras que se definen a continuación:

B	R	N	O	R	A	L	I	N	A	C	O	N	H	D	O	X	A	G	U	E	S	W	O	U	M	T	R	A	X
A	E	I	N	G	R	A	G	C	I	L	N	T	A	Z	T	O	L	Z	E	G	H	X	B	F	A	U	N	A	S
L	E	R	I	C	I	E	N	C	I	A	X	I	X	P	A	R	T	I	C	I	O	N	I	L	A	W	C	N	O
O	E	A	N	E	S	T	A	N	D	P	R	T	T	Z	O	U	G	L	T	E	Z	W	C	Q	X	R	O	W	G
X	I	S	C	O	Y	N	A	S	V	L	C	X	Q	I	R	F	O	I	T	A	L	Q	U	P	Y	O	M	X	S
E	M	Y	T	J	U	C	H	T	M	A	B	C	W	A	N	O	I	S	U	L	C	X	E	M	O	B	P	L	A
R	P	B	Q	I	V	L	U	I	Y	C	A	I	C	N	E	U	C	E	R	F	R	E	S	A	X	P	L	S	R
O	O	R	G	D	M	H	L	J	N	E	T	R	V	A	C	I	O	L	A	X	V	N	R	O	E	E	E	Y	T
J	S	O	Q	E	L	P	N	I	R	B	E	H	I	S	R	I	J	U	T	A	K	K	D	P	M	V	M	S	A
I	I	E	M	Q	C	X	L	T	W	D	F	Q	B	F	J	L	S	H	L	J	A	F	I	I	P	Z	E	I	V
O	B	S	D	S	U	N	I	V	E	R	S	O	T	N	V	A	C	E	C	Z	X	I	E	C	I	S	N	L	S
U	L	T	N	O	I	S	R	E	P	S	E	D	Y	Q	I	N	C	L	U	S	I	O	N	T	R	E	T	S	Ñ
G	E	A	Z	B	N	V	U	O	I	O	G	T	K	R	X	C	Z	A	F	G	O	T	T	O	I	J	O	K	N
L	L	D	E	L	A	R	I	P	U	D	U	M	P	Q	I	Z	Q	W	E	C	M	E	O	G	C	A	C	A	X
A	Q	I	M	W	T	E	B	O	T	I	R	C	L	A	C	E	K	R	V	J	A	R	M	R	A	A	I	A	S
B	D	P	E	R	M	U	T	A	C	I	O	N	L	E	M	A	L	W	D	U	S	R	I	A	F	N	F	U	O
V	Q	E	L	F	U	C	R	W	Ñ	Ñ	C	A	R	T	N	I	W	G	O	I	C	I	C	M	U	D	I	T	P
T	Ñ	S	S	U	F	I	C	I	E	N	T	E	A	N	T	Y	R	S	L	L	N	V	M	A	T	N	C	X	H
K	I	B	W	D	A	D	I	L	I	B	I	S	N	E	S	N	G	H	D	A	Ñ	O	S	C	A	R	I	O	D

1. Primer matemático en estudiar probabilidades. 2. Teorema de ..... relaciona probabilidades empíricas con las teóricas. 3. Un grupo de conjuntos colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes forman una .... del universo. 4. Una .... está formada cuando dos conjuntos no tienen ningún elemento en común. 5. Lo inverso del punto anterior, cuando un conjunto tiene todos los elementos de otro. 6. Suceso .... cuando no puede ocurrir. 7. Lo contrario del anterior. 8. El conjunto que tiene todos los elementos posibles. 9. El que no tiene ningún elemento. 10. Un conjunto es ... de otro cuando contiene a todos los elementos del universo que no pertenecen al primero. 11. Los tres ... básicos del Álgebra de Probabilidades. 12. El principio de razón .... se agregó a la definición clásica de probabilidad. 13. Probabilidad ... se calcula como cociente de frecuencia experimentales. 14. Una ... de n elementos se calcula con el factorial de tal número.

42) Conociendo los siguientes valores de Prevalencia de una enfermedad, calcular los correspondientes Odds y la Probabilidad de estar sano:

Prevalencia	**Odds enfermos**	**(1 – Prevalencia)**
10		
20		
33		
43		
50		
66		
80		
88		
94		

43) Para los valores de las Tablas 4.1 y 4.2 del capítulo anterior, calcular los correspondientes LR+ y LR- para cada uno de los puntos de corte adoptados. ¿Cuánto vale el Odds?

44) Encontrar la relación entre el VP+ y LR+ reemplazando en las ecuaciones dadas en el punto 5.5.3 anterior. ¿Qué relación se encuentra con los Odds de enfermedad?

45) Calcular todos los índices clínicos conociendo los datos de las tabla siguiente:

En Realidad	**Diagnóstico**		
Está	*D+*	*D-*	Total
Sano	*45*	*98*	*143*
Enfermo	*105*	*102*	*207*
Total	*150*	*200*	*350*

46) Con la tabla de datos obtenidas en un experimento hecho sobre 400 sujetos, se pide calcular los índices clínicos y compararlos con los del ejemplo anterior. Explicar cual de los dos es el mejor de acuerdo a los tres Tipos de enfermedades posibles, efectuando una comparación cualitativa entre los mismos. Es decir una comparación "a ojo" sin tener la correspondiente validación estadística de estas conclusiones.

Verdad	Diagnóstico		
	+	-	Total
Sano	*180*	*98*	*278*
Enfermo	*40*	*82*	*122*
Total	*220*	*180*	*400*

47) Analizar la calidad de el test clínico desde un punto de vista dual, es decir teniendo en cuenta Sensibilidad, Especificidad si es una enfermedad del Tipo II. Analizar que ocurre con el Delta Predictor simulando 10 valores de prevalencia entre 0,1 y 0,9.

Verdad	Diagnóstico		
	+	-	Total
Sano	*100*	*250*	*350*
Enfermo	*400*	*250*	*650*
Total	*500*	*500*	*1000*

48) Lo mismo que en el ejemplo anterior pero si se trata de una enfermedad del Tipo I

Verdad	Diagnóstico		
	+	-	Total
Sano	*90*	*350*	*440*
Enfermo	*310*	*50*	*360*
Total	*400*	*400*	*800*

49) Ídem anterior pero para una enfermedad del Tipo III

Verdad	Diagnóstico		
	+	-	Total
Sano	*40*	*460*	*500*
Enfermo	*360*	*40*	*400*
Total	*400*	*500*	*900*

50) Conociendo la sensibilidad (90%) y la especificidad (75%) de una prueba clínica se pide calcular todos los siguientes índices clínicos que conozca. Representar la variabilidad de ciertos índices con la prevalencia, y la obtención de sus valores para p = 0,4.

Apéndice 1: Teoría de conjuntos

Se define como *conjunto* a una serie de objetos llamados *elementos o entes.* Como en Filosofía, se entiende por ente a *todo lo que es*. Los elementos pueden ser reales o imaginarios, tangibles o intangibles; mientras se pueda decir algo de ellos, son entes. Al caso contrario se lo denomina la *nada*, o sea *lo que no es*. Como la nada no puede tener elementos, conviene asimilar este concepto al denominado *conjunto vacío* que se denota con:

$\varnothing$: es el conjunto que no tiene elementos

Si los pacientes se clasifican en (+) y (-), no puede haber ninguno que a la vez sea (+) y (-).
Su opuesto, o complemento, es el conjunto que incluye a todos los elementos posibles, al que se llama *conjunto universo* denotado con:

$\wp$: es el conjunto de todos los elementos posibles

Por ejemplo, todos los pacientes que concurren a hacerse atender por el clínico, configuran su *universo* de pacientes o su población de referencia.

Cualquier subconjunto del conjunto universo estará formado por una serie de elementos pertenecientes al mismo. Este conjunto será una parte del universo porque no puede definirse fuera del mismo. Por ejemplo, el conjunto de pacientes sanos, el conjunto de enfermos, etc. Normalmente, en biología el universo será la población en estudio.

A : un conjunto formado por varios elementos e_i

Hay dos casos extremos: cuando el suceso ***A*** esté formado por todos los elementos será el universo, y cuando tenga un solo elemento será el *conjunto unitario* o *elemental.* Se pueden usar como ejemplos de conjuntos a los casos siguientes:

A: { centrífuga, jeringa, pipeta, balanza } = { e_1, e_2 , e_3 , e_4 }
B: { sangre, suero, kit de glucosa, remedio } = { e_5 , e_6 , e_7 , e_8 }
C: { bioquímico, farmacéutico, paciente } = { e_9 , e_{10} , e_{11} }

Donde con el símbolo e_i se ha denotado a cada uno de los diferentes elementos usados como ejemplos. A partir de allí se pueden definir una serie de *relaciones* entre los conjuntos y sus elementos, como la ***pertenencia***:

Se dice que un elemento *pertenece* a un conjunto cualquiera cuando está en el mismo, en caso contrario se dice que *no pertenece* al mismo. Se los expresa con:

$e_3 \in \boldsymbol{A}$ *pertenece*
$e_{23} \notin \boldsymbol{A}$ *no pertenece* (con e_{23}: heladera)

Esta idea es algo diferente a la de ***inclusión*** que se utiliza para relaciones entre conjuntos. Por ejemplo: sea el conjunto ***K:*** { pipeta, balanza } = { e_3 , e_4 }, ***K*** está incluido en ***A,*** pues *todos* sus elementos pertenecen también a ***A***. En cambio, el conjunto L:{ e_3 , e_5, e_7 , e_{23} } = { pipeta, sangre, kit de glucosa, heladera }no lo está:

$$K \subset A \qquad (\,K \text{ está } \textit{incluido} \text{ en } A\,)$$

o bien,

$$L \not\subset A \qquad (\,L \text{ no está } \textit{incluido} \text{ en } A\,)$$

El concepto de inclusión, significa que ***K*** es un subconjunto de ***A***. En cambio, si algunos o todos los elementos de uno no pertenecen al otro, entonces no se trata de un subconjunto y no se puede hablar de inclusión. Para el caso particular donde ambos tienen los mismos elementos, la inclusión se transforma en ***igualdad***. Así, dos conjuntos son iguales cuando:

$$A = X \Leftrightarrow X : \{ e_i \ \forall i \ / \ e_i \in A \}$$

o sea: $A = X$ { centrífuga, jeringa, pipeta, balanza } = { e_1, e_2 , e_3 , e_4 }

La ***unión*** de dos conjuntos es otro conjunto formado por los elementos de ambos. O sea:

$$B \cup C : \{ e_i \ \forall i \ / \ e_i \in B \ \textbf{ o } \ e_i \in C \} = \{ e_5 , e_6 , e_7 , e_8 , e_9 , e_{10} , e_{11} \}$$

La ***intersección*** de dos conjuntos es otro conjunto formado por todos los elementos comunes a ambos, y se denota con:

$$B \cap L : \{ e_i \ \forall i \ / \ e_i \in B \ \textbf{ y } \ e_i \in L \} = \{ e_5 , e_7 \}$$

El ***complemento*** de un conjunto ***A*** cualquiera es otro conjunto: $\overline{A}$ formado por los elementos del universo, que no pertenecen a ***A***. O sea:

$$\overline{A} : \{ e_i \ \forall i \ / \ e_i \in \wp \ \textbf{ y } \ e_i \notin A \}$$

Si para los ejemplos anteriores se define un universo formado por cien elementos, tal como $\wp$
$\wp$: { $e_i \ \forall i = 1, 2, 3, ... , 100$ }, entonces el complemento del conjunto ***A*** será:

$$\overline{A} : \{ e_5 , e_6 , e_7 , ... , e_{99} , e_{100} \}$$

Se dice que el conjunto $B \nabla L$ es el ***complemento relativo*** del conjunto ***L*** cuando está formado por todos los elementos de ***B*** que no pertenecen a ***L*** . Esto es:

$$B \nabla L = B \cap \overline{L} : \{ e_i \ \forall i \ / \ e_i \in B \ \textbf{ y } \ e_i \notin L \} = \{ e_6, e_8 \}$$

o viceversa:

$$L \nabla B = L \cap \overline{B} : \{ e_i \ \forall i \ / \ e_i \in L \ \textbf{ y } \ e_i \notin B \} = \{ e_3 , e_{23} \}$$

Se dice que dos conjuntos son ***excluyentes*** cuando no tienen ningún elemento en común. A veces se los llama *disjuntos*. Esto significa que la intersección de ambos conjuntos no tiene elementos.

O sea, debe ser igual al conjunto vacío. Por eso el concepto de exclusión no necesita un símbolo especial como los anteriores. Se define con:

Si $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C} = \varnothing$, entonces son excluyentes o disjuntos.

También se pueden ilustrar estos conceptos con la Tabla de la Verdad vista en el capítulo anterior

El conjunto de pacientes enfermos se expresa con ***TE*** y tiene una cantidad de elementos conformado por todos los individuos enfermos (TE) que concurrieron al laboratorio, donde se verificó que padecían una cierta enfermedad. Análogamente con los sanos, entonces:

$\boldsymbol{TE} \cap \boldsymbol{TS} = \varnothing$ (no hay ninguno que a la vez sea sano y enfermo.

$\boldsymbol{TE} \cup \boldsymbol{TS} = \wp$ (todos los casos posibles, el universo)
Además se puede hacer lo mismo con el conjunto de los diagnosticados positivos (***TP***) y los negativos (***TN***), entonces queda:

$\boldsymbol{TP} \cap \boldsymbol{TN} = \varnothing$ (no hay ninguno que a la vez sea sano y enfermo).

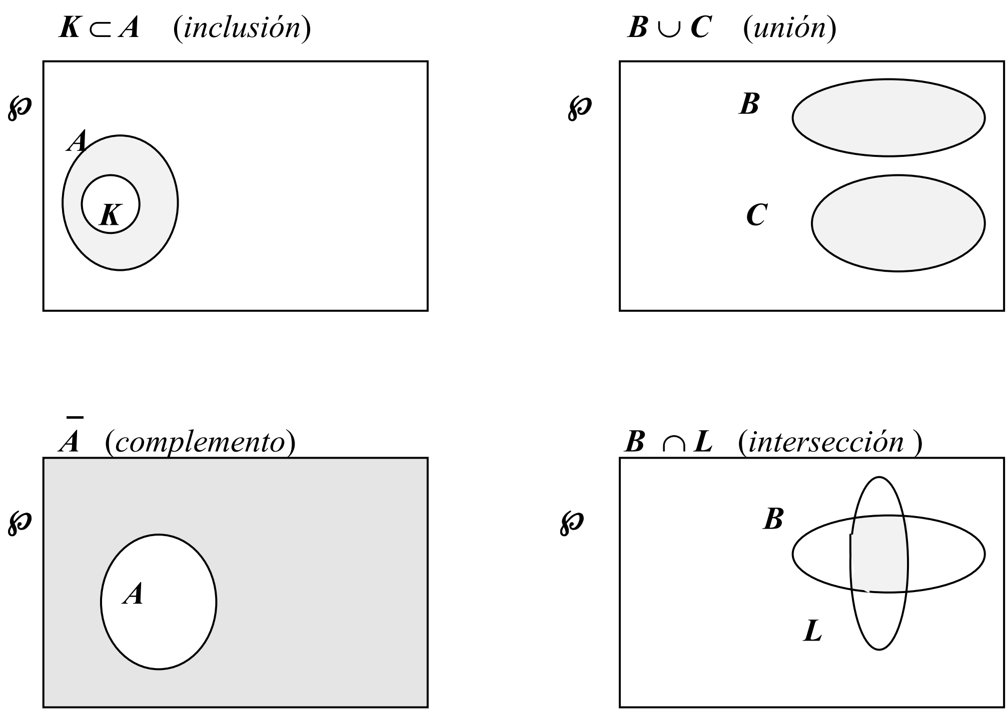
$\boldsymbol{TP} \cup \boldsymbol{TN} = \wp$ (todos los casos posibles, el universo).

Los complementos serían:

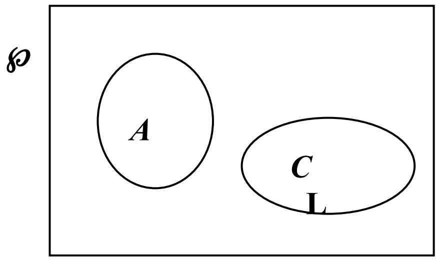
$\overline{\boldsymbol{TS}} = \boldsymbol{TE}$ o bien $\overline{\boldsymbol{TE}} = \boldsymbol{TS}$ y para el diagnóstico $\overline{\boldsymbol{TP}} = \boldsymbol{TN}$ o bien $\overline{\boldsymbol{TN}} = \boldsymbol{TP}$

Para una mejor visualización de los conceptos de la teoría de conjuntos, conviene utilizar un modo gráfico al mostrar sus relaciones mutuas:

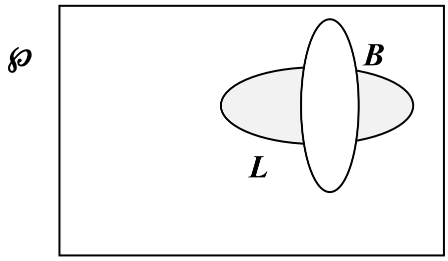
Gráfico A5.1: Diagramas de Venn en la teoría de conjuntos



$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C} = \varnothing$ *(exclusión)*



$\boldsymbol{B} \nabla \boldsymbol{L} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{L}$ *(complemento relativo)*



Los Diagramas de Venn suelen usarse para esta tarea. Con un rectángulo se representa al universo $\wp$. Dentro del mismo se usan entornos cerrados de forma ligeramente ovalada para mostrar a los conjuntos. Adecuados sombreados resaltan las relaciones que se quieren mostrar. Todo esto se muestra en el Gráfico 5.1 siguiente, donde se han representado las relaciones vistas más arriba entre los conjuntos definidos como ***A, B, C, K*** y ***L*** para los conceptos de inclusión, unión, intersección, complemento común y relativo y para la exclusión.

Propiedades

El siguiente conjunto de propiedades se puede deducir de las definiciones vistas más arriba; aquí se generaliza para no repetir las mismas propiedades en cada una de las relaciones entre conjuntos descriptas.

Propiedad transitiva: Si $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A} \subset \wp$ entonces $\boldsymbol{K} \subset \wp$

Propiedad conmutativa: $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L} \cap \boldsymbol{B}$ o bien $\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{B}$

Propiedad asociativa: $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C}$ o bien $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{L}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{L}) \cap \boldsymbol{B}$

Propiedad distributiva: $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$

$\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C})$

Idempotencia: $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$ y también $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

Identidad: $\boldsymbol{A} \cup \wp = \wp$ y también $\boldsymbol{A} \cup \varnothing = \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A} \cap \wp = \boldsymbol{A}$ y también $\boldsymbol{A} \cap \varnothing = \varnothing$

Por ejemplo, la unión de tres sucesos ***A*** (formado por 5 bolillas numeradas de 0 a 4) y ***B*** (formados por otras 3 bolillas numeradas de 5 a 7), y ***C*** (formado por 2 bolillas la 8 y la 9), va a resultar igual al conjunto de las diez bolillas que conforman un bolillero común. Es lo mismo unir ***A*** con ***B*** primero, y luego unir ***C***, que cualquier otra manera de unir a esos tres conjuntos, el resultado siempre seré el mismo y eso ilustra la propiedad transitiva. Análogamente para el caso de dos conjuntos en lugar de tres. La idempotencia significa que todos conjunto unido a sí mismo, da el conjunto original, al igual que su intersección. La identidad significa que todos conjunto unido con el universo resulta el universo, mientras que si se hace la intersección el resultado es el mismo conjunto.

Ejemplos de aplicación

1) Decidir si los siguientes conjuntos son vacíos:

a) ***X*** : $\{x \;\forall\; x^2 = 36 \;\text{ y } 2\,x = 8\} = \varnothing$ porque no hay ningún x que satisfaga ambas relaciones.

b) ***X*** : $\{x \;\forall\; x \neq x\} = \varnothing$ porque no hay ningún x que cumpla el requisito.

c) ***X*** : $\{x \;\forall\; x + 23 = 23\} \neq \varnothing$ porque cero la satisface. O sea, X = [0]

2) Si un conjunto ***A*** de pacientes resultó positivo, y entre ellos un conjunto ***K*** estaba enfermo y el resto ***L*** estaba sano: ¿ Como se pueden usar las propiedades anteriores ? Lo mismo si se tiene un conjunto de pacientes ***B*** con resultado negativo y de entre ellos hay otro conjunto ***X*** que estaban sanos y otro ***Y*** que estaban enfermos.
Hallar el conjunto de sanos y el de enfermos, si *:* $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \wp$

3) Los 4 conjuntos de figuras en el plano son:
A : {x ∀ x es un cuadrilátero} ***C*** : {x ∀ x es un rombo}
B : {x ∀ x es un rectángulo} ***D*** : {x ∀ x es un cuadrado}
Determinar cuáles son subconjuntos de los otros.

Un cuadrado es un rectángulo por tener sus ángulos rectos, es un rombo por tener sus 4 lados iguales y además es un cuadrilátero por tener cuatro lados. Esto es: $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{B}$ **;** $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{C}$ **;** $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{A}$
Como hay cuadriláteros, rectángulos y rombos que no son cuadrados, D es un subconjunto propio de los otros tres.
Por su parte, como un rombo y un rectángulo son casos particulares de cuadriláteros resulta: $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{A}$

4) Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son iguales: $\varnothing$; $\{\varnothing\}$; $\{\mathbf{0}\}$:

Ninguno. El conjunto $\{\mathbf{0}\}$ tiene un elemento: el número cero. El conjunto $\{\varnothing\}$ tiene un elemento: el conjunto vacío. Y el conjunto vacío $\varnothing$: no tiene ningún elemento.

5) Determinar cuál es la principal diferencia entre los conjuntos siguientes:

A: Los días del año. ***C***: Los bioquímicos argentinos.
B: La cantidad de farmacias en Posadas. ***D***: El conjunto de los números reales.

La principal diferencia es que el último es un conjunto de tamaño infinito, mientras que los tres primeros son finitos.

6) Determinar los cuatro conjuntos posibles al diagnosticar a muchos pacientes con la misma técnica clínica:

Son cuatro: ***vp*** es el conjunto de los verdaderos positivos, ***vn*** es el conjunto de los verdaderos negativos, ***fp*** los falsos positivos y ***fn*** los falsos negativos.

Apéndice 2: Cálculo combinatorio

Antes de entrar al campo algebraico conviene repasar los conceptos del cálculo combinatorio, necesarios para calcular el número de casos en los problemas de probabilidad.

. *Conteos ordenados*: si un suceso puede ocurrir de r maneras diferentes, y si, continuando el proceso, otro puede ocurrir de s maneras distintas, y luego un tercer evento de t formas, y así sucesivamente, entonces existirán N maneras de realizar todos los sucesos en el orden indicado.

$$N = r \,.\, s \,.\, t \ldots$$

Por ejemplo, para calcular la cantidad de Códigos Postales del país, que tiene cuatro cifras, donde la primera no puede ser cero. Entonces, en el primer puesto habrá 9 casos posibles (los números de 1 a 9), en el segundo, tercer y cuarto puesto habrá 10 casos posibles (los números de 0 a 9), por lo tanto resulta $N = 9.\ 10\ .\ 10\ .\ 10 = 9000$ códigos posibles en total.

. *Variaciones:* si se tienen n objetos diferentes en un conjunto, y de ellos se extraen r, se llama *variación de n objetos tomados de a r* al número de maneras diferentes que hay de hacerlo en forma ordenada.

$$V(n, r) = n! / (n-r)!$$

Por ejemplo, se tienen $n = 4$ objetos diferentes a, b, c y d. Tomado de a uno ($r = 1$), resultan 4 casos posibles a b c d; V (4,1) = 4! / (4-1)! = 4. En cambio, si se toman de a dos, entonces es $r = 2$ y los casos son: ab ac ad ba bc bd ca cb cd da db dc, o sea, 12 casos diferentes en total; V (4,2) = 4! / (4-2)! = 12. Para las variaciones, no es lo mismo el subconjunto "ab" que el "ba" pues interesa el orden. Además, como son extracciones sin reposición, no se pueden repetir los objetos, es decir el caso "aa" es imposible. Todo ocurre como si se colocara la mano en una "bolsa" de n objetos, y se sacan r de ellos,"de a uno y por orden".
Otro ejemplo: una secretaria debe distribuir a 5 pacientes en 3 salas de atención diferentes con turnos disponibles; entonces dispone de V (5,3) = 5!/(5-3)! = 20 variaciones diferentes.

.*Permutaciones:* si se tienen n objetos diferentes, se llama permutación al número de formas diferentes que hay de ordenarlos entre sí. Este concepto es equivalente al de una variación, pero con $r = n$. O sea,

$$Pn = V(n, n) = n!$$

Como ejemplo, se puede imaginar a un bioquímico que debe realizar 3 determinaciones a, b y c en una muestra de un paciente. Las posibilidades son $P_3 = 3! = 6$. Que se pueden visualizar con abc acb bac bca cab cba.

.*Combinaciones: s*i se tienen n objetos diferentes en un conjunto, y de ellos se extraen r a la vez, se llama *combinación de n objetos tomados de a r*, al número total de maneras posibles que hay de hacerlo (sin tomar en cuenta el orden).

$$C(n, r) = n! / (n-r)!\ .\ r!$$

La relación entre variaciones, permutaciones y combinaciones es:

$$C\ (n\ ,\ r) = V\ (n\ ,\ r)\ /\ r! = V\ (n\ ,\ r)\ /\ Pr$$

Por ejemplo, un visitador médico de un laboratorio farmacéutico concurre a un sanatorio a entrevistar a 5 médicos, pero dispone de tiempo para solo 3 de ellos, entonces tiene 10 maneras distintas de hacerlo: 10 = C (5 , 3) = 5! / (5-3)! .3! = o sea hay 10 combinaciones posibles. Se trata de combinaciones pues no interesa el orden de las visitas.

Otro ejemplo: un bioquímico quiere comprar 5 *kits* diferentes, pero solo le alcanza el dinero para 3 de ellos. Entonces, tiene 10 combinaciones posibles para hacer su compra. Vuelve a su laboratorio con los tres que pudo adquirir, y ahora se pregunta en qué orden los utilizará; resulta que puede hacerlo de 6 formas diferentes o permutaciones posibles. Finalmente, decide entregar uno a cada uno de sus dos ayudantes y guardar el tercero. Así, tiene 3 variaciones posibles de cómo poder hacerlo.

. *Propiedades de la combinatoria*:

$$C\ (n\ ,\ 0) = 1 = C\ (n\ ,\ n) = n!\ /\ 0!\ n! = n!\ /\ n!$$

$$C\ (n\ ,1) = n = C\ (n\ ,\ n-1) = n!\ /\ 1!\ (n-1)! = n!\ /\ (n-1)!$$

$$C\ (n\ ,\ r) = C\ (n\ ,\ n-r) = n!\ /\ r!\ (n-r)!$$

Las combinaciones de 10 productos tomados de a 1 son 10; lo mismo que si son tomados de a 9. A su vez, si se toman de a 10 no hay ninguna, lo que es lo mismo que si no se toma ninguno. Pero si se toman de a 2 entonces hay: 10! / 8! 2! = 45 combinaciones posibles.

.*Permutaciones con repetición:* puede ocurrir que muchos objetos se repitan en el conjunto total, entonces, el número de permutaciones se calcula con :

$$PR\ (n\ /\ s\ ,\ t\ ,\ u ... z) = n!\ /\ s!\ .\ t!\ .\ u!\ ...\ z!$$

Por ejemplo, si se tienen 10 clientes en una farmacia de los cuales 8 son hombres y 2 son mujeres, el número de permutaciones posibles es PR = 10! / 8! . 2! = 45. Eso significa que hay 45 maneras de formar dos grupos ordenados en la cola de espera, uno de a 8 y el otro de 2.

. *Pruebas repetidas:* en muchos casos, el experimento consiste en escoger un elemento cualquiera de un conjunto de tamaño *n*, y repetir esto *r* veces. En el caso de los juegos de azar, el ejemplo más común es cuando se extraen cartas de un mazo, o en un sorteo cuando se sacan bolillas del bolillero. El detalle a tener muy en cuenta en estos casos es ver si se reponen o no los elementos escogidos del conjunto. De acuerdo con ello se diferencian así:

.. *Pruebas con substitución*: cuando se repone el objeto escogido antes de seguir con la extracción siguiente. En tal caso, cada vez que se escoge un elemento hay siempre un total de *n* elementos. Así, el conteo de casos es :

$$n\ .\ n\ .\ n\ .\ ...\ n = n^r$$

Por ejemplo, en un mazo de barajas españolas de 40 cartas se pueden sacar 3 de ellas en forma sucesiva una cantidad 40 . 40 . 40 = 64.000 maneras diferentes, si se hace con reposición.

.. *Pruebas sin substitución*: cuando no se repone el objeto extraído, antes de seguir con la siguiente extracción. En tal caso, cada vez que se escoge un elemento, el total de *n* elementos disminuye en una unidad. Así, el conteo para *r* casos es:

$$n \,.\, (n-1) \,.(n-2) \,.\, ...(n-r+1) \;=\; n! \,/\, (n-r)! = \mathrm{V}\,(n\,,\,r)$$

Por ejemplo, de un mazo de barajas españolas de 40 cartas se sacan 3 de ellas en forma sucesiva y hay un número de: 40 . 39 . 38 = 59.280 maneras diferentes de hacerlo, cuando no hay reposición. Un bioquímico toma 2 carpetas de su fichero de 150 pacientes, entonces tiene unas 22.350 formas diferentes de hacerlo. Un farmacéutico saca 2 calmantes de su stock de 10 para mostrarle al cliente, entonces tiene 90 maneras distintas de hacerlo.

.*Producto cartesiano:* sean dos conjuntos ***A*** y ***B*** cuyos respectivos elementos son Ai y Bi; se denomina producto cartesiano a un nuevo conjunto formado con todos los pares posibles AiBi

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

Por ejemplo, si ***A*** (calmante, laxante, antibiótico) y ***B*** (agua, sangre) el producto cartesiano de ambos será ***C*** (calmante-agua, calmante-sangre, laxante-agua, laxante-sangre, antibiótico-agua, antibiótico-sangre).