

# 20

## ANOVA para más de un factor

El modelo de ANOVA encajado estudia una sola fuente de variación como factor de análisis, el cuál se subdivide en subgrupos de tipo jerárquico para su análisis como fuentes de variación separadas. Es decir, fuentes o factores encajados dentro de una clasificación superior. En el presente capítulo se verán fuentes de variación de igual rango, desarrollando modelos para analizar los casos de más de un factor. Para comenzar se tratará el caso más común: ANOVA de dos factores, y el caso de ANOVA multifactorial (tres o más factores) se deja la inquietud para el lector interesado en avanzar un poco más que los límites planteados para la presente obra. Por ejemplo, se pueden usar estos modelos en Control de Calidad, así se puede investigar el efecto que tiene en la técnica bioquímica empleada el factor humano y las diferentes marcas de kits comerciales en el mercado, para el caso de dos factores. O bien, incluir diferentes espectrofotómetros como un tercer factor de análisis. El cálculo del modelo de ANOVA de dos factores se puede clasificar en dos casos básicos: el primero, *sin repetición*, es cuando hay un solo dato por cada combinación posible de los dos factores y el segundo, *con repetición*, cuando hay más de un dato para cada caso o combinación de factores posibles.

En el modelo de ANOVA de dos factores con repetición aparece un nuevo concepto estadístico de gran utilidad para el investigador: la *interacción* de ambos factores analizados. Cuando el efecto de ambos factores actuando en conjunto es mayor que el que tienen por separado, se dice que hay *sinergia*, una especie de interacción positiva. En cambio, si el efecto conjunto es menor, se habla de *interferencia*. Esto agrega una nueva hipótesis de trabajo a las cuatro vistas para los modelos de ANOVA: Normalidad, Aleatoriedad, Independencia y Homoscedasticidad. Este quinto supuesto básico es: *No hay interacción*. Por su parte, si no se realiza más de una medición por cada combinación de los dos factores, no se puede detectar la interacción y no se requiere del quinto supuesto.

Al final se muestran algunos casos especiales de uso difundido en la práctica y se explica la manera de generalizar los modelos de ANOVA cuando hay más de dos factores en estudio. En forma paralela se van muestra el modelo no paramétrico de Friedman, para poder trabajar en caso que no se pueda (o no se quiera) verificar los supuestos básicos.

## 20.1 ANOVA de dos factores con repetición

Antes de comenzar el estudio de este modelo conviene repasar la diferencia conceptual entre un modelo de ANOVA encajado de dos niveles y un ANOVA de dos factores, porque a menudo se los confunde. La manera de diferenciarlos es ver si existe correspondencia entre los grupos o clases. Cuando existe tal correspondencia, entonces el modelo apropiado es el de dos factores. En cambio, cuando no hay correspondencia entre las clases y tal factor representa solamente subdivisiones aleatorias de las clases dentro de otro factor, se trata de un modelo encajado. Para aclarar mejor estas ideas se presenta el Gráfico 20.1 siguiente:

**Gráfico 20.1:** ANOVA de dos factores versus ANOVA encajado de dos niveles.

**ANOVA encajado de dos niveles**

Edad	Niños		Jóvenes		Adultos	
Sexo	1	2	1	2	1	2
	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*

**ANOVA de dos factores**

	Edad	Niños		Jóvenes		Adultos	
Sexo	1	*	*	*	*	*	*
	2	*	*	*	*	*	*
		*	*	*	*	*	*
		*	*	*	*	*	*
		*	*	*	*	*	*

En este caso se hicieron 6 mediciones para cada combinación de edad y sexo. En el caso de un modelo de ANOVA de 2 factores, uno sería la edad, clasificada en 3 grupos: niños, jóvenes y adultos y el segundo factor el sexo. Esto es claramente un modelo I para ambos casos, porque no tendría sentido pensar que se hizo un sorteo para el sexo, entre todos los sexos posibles. Por lo tanto, no puede ser un modelo encajado porque el segundo nivel debe ser un Modelo II. Se podría dibujar la tabla de manera tal de tener al sexo en el primer nivel, y encajado dentro del mismo las edades como segundo nivel. Entonces habría que pensar que se hizo un sorteo entre todas las edades posibles, lo que no tiene sentido. Se puede ver así que en este caso solo se puede tratar de un modelo de dos factores. Otra forma de verlo es considerando que el subgrupo 1 de niños, es por sorteo uno de los posibles, y que no tiene nada que ver con el subgrupo 1 de jóvenes y el subgrupo 1 de adultos, para que sea un modelo encajado. En cambio, para el caso de dos factores, el subgrupo 1 es lo mismo para las tres clases de edades planteadas. Se pueden generalizar estas ideas, pensando que en un ANOVA de dos factores donde cada grupo que se tome debe ser el mismo tipo en todos los grupos del otro. Por ejemplo, el grupo Sexo 2, es igual para los tres grupos de edades. En cambio, en el encajado, puede ser cualquiera que salga por sorteo.

Antes de plantear el modelo teórico conviene ilustrar el procedimiento de cálculo en el modelo de ANOVA de dos factores. Para ello, se eligió un ejemplo con repetición. Se trata de un estudio sobre el tiempo de cura de un dolor de cabeza de acuerdo a dos factores: El factor A es la ingesta de aspirinas para aliviar el dolor y el otro factor B es la ingesta de café con el mismo objetivo. Se tomaron 3 pacientes para cada una de las 4 combinaciones posibles, elegidos al azar, de los factores a estudiar y se le midió el tiempo que tomó el alivio del dolor medido en horas. Los datos se muestran en la Tabla 20.1 siguiente:

Tabla 20.1: ANOVA de dos factores con repetición

		Factor A: Aspirina		
		SI	No	$\Sigma$
Factor B: Café	SI	1,6 1,9 1,8	4,3 4,1 3,6	
	$\Sigma$	5,3	12	17,3
	No	3,6 3,2 3,8	4,3 5,1 4,9	
	$\Sigma$	10,6	14,3	24,9
$\Sigma\Sigma$	15,9	26,3	42,2	

Paso 1) Se calcula la suma total de datos  $T = \sum_1^a \sum_1^b \sum_1^n X_{ijk} = \sum_1^a \sum_1^b T_{jk} = \sum_1^a T_c = 42,2$

Paso 2) Se calcula la suma del cuadrado de todos los datos:

$$T_x^2 = \sum_1^a \sum_1^b \sum_1^n X_{ijk}^2 = (1,6)^2 + (1,9)^2 + \dots + (4,9)^2 = 163,82$$

Paso 3) Se calcula la suma de los cuadrados de los totales de las combinaciones de factores, dividido por el tamaño muestral respectivo. En este caso todos los tamaños son iguales a 3, hay tres mediciones repetidas por cada celda, combinación de los dos factores. Y hay cuatro celdas en total, cada una con una suma de los datos que contiene, entonces:

$$T_c^2 = \sum_1^a \sum_1^b T_{jk}^2 / n = (1/n) \sum_1^a \sum_1^b T_{jk}^2 = (1/3)[(5,3)^2 + (12)^2 + (10,6)^2 + (14,3)^2] = 162,98$$

Paso 4) Se calcula el término de corrección  $T^2 / N = (42,2)^2 / 12 = 148,4$

Paso 5) Se calcula la suma de los cuadrados de los totales del grupo B (café) y se divide por su tamaño muestral respectivo. En este caso hay 6 datos para cada caso y dos subtotales, luego:

$$T_b^2 = \sum_1^a \sum_1^n T_{ik}^2 / a.n = (1/6)[(17,3)^2 + (24,9)^2] = 153,22$$

Paso 6) Se calcula la suma de los cuadrados de los totales del grupo A (aspirinas) y se divide por su tamaño muestral respectivo. En este caso hay 6 datos por cada caso y dos subtotales, luego:

$$T_a^2 = \sum_1^b \sum_1^n T_{ik}^2 / b.n = (1/6)[(15,9)^2 + (26,3)^2] = 157,42$$

Paso 7) Se calculan las sumas de cuadrados necesarias

$$SS_{\text{total}} = T_x^2 - T^2 / N = \text{Paso 2} - \text{Paso 4} = 15,42$$

$$SS_{\text{dentro}} = T_x^2 - T_c^2 = \text{Paso 2} - \text{Paso 3} = 0,84$$

$$SS_{\text{filas}} = T_b^2 - T^2 / N = \text{Paso 5} - \text{Paso 4} = 4,82 \quad (\text{café})$$

$$SS_{\text{columnas}} = T_a^2 - T^2 / N = \text{Paso 6} - \text{Paso 4} = 9,02 \quad (\text{aspirinas})$$

$$SS_{\text{interacción}} = T_c^2 + (T^2 / N) - T_b^2 - T_a^2 = (\text{Paso 3} - \text{Paso 4}) - SS_{\text{filas}} - SS_{\text{columnas}} = 0,74$$

La suma de cuadrados total sigue siendo la suma de las sumas de cuadrado entre y dentro de los grupos. Aquí, la suma de cuadrados entre se descompone en tres términos: una debida al grupo A, otra al grupo B y la última debida a la interacción. Entonces:

$$SS_{\text{total}} = (SS_{\text{filas}} + SS_{\text{columnas}} + SS_{\text{interacción}}) + SS_{\text{dentro}}$$

Paso 8) Se calcula el cuadro de ANOVA como sigue:

**Tabla 20.2: Cuadro de ANOVA para los datos de Tabla 20.1**

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Entre Filas (café)	4,82	(b-1)=1	4,82	45,9***
Entre columnas (aspirinas)	9,02	(a-1)=1	9,02	85,9***
Interacción	0,74	(a-1)(b-1)=1	0,74	7,05*
Dentro grupos (error)	0,84	a.b(n-1)=8	0,105	
Total	15,42	11		

Los tres estadígrafos de comparación F se obtienen dividiendo cada MS encontrado por el MSError, a diferencia del modelo encajado donde los cocientes se hacían en cascada. Los valores de tablas son :  $F_{0,95; 1; 8} = 5,32$  ;  $F_{0,99; 1; 8} = 11,26$  y  $F_{0,999; 1; 8} = 25,42$ . Comparando con los tres estadígrafos se deduce que los tres son significativos. La ingesta tanto de aspirinas como de café alivian el dolor de cabeza con resultados altamente significativos. Sin embargo se detectó un efecto de interacción entre ambos factores  $F = 7,05 *$ , lo que significa que el efecto de ambos factores actuando en forma simultánea, tiene un efecto mayor que si actuasen por separado. Esto invalida el quinto supuesto de Anova, y lo que debe hacerse es usar métodos no paramétricos para completar el estudio.

En este problema la interacción resultó significativa y se debe recordar que representa la influencia de un factor sobre el otro. Los efectos de ambos factores actuando en conjunto no son simplemente aditivos, sino que cualquier combinación de ellos puede arrojar una contribución

conjunta tanto positiva (*sinergia*) como negativa (*interferencia*). La conclusión del ejemplo anterior, es que hay sinergia al tomar un café y una aspirina en forma simultánea para aliviar el dolor de cabeza. El alivio aparece más rápido que si se tomasen por separado.

## 20.2 Supuestos básicos y modelos teóricos

Los supuestos básicos para los modelos de ANOVA con repetición de dos o más factores son:

- Las muestras deben ser *aleatorias*.
- Las muestras deben provenir de poblaciones *normales* o gaussianas.
- Las muestras deben ser *independientes*.
- Las varianzas de las muestras son iguales (*homoscedasticidad*).
- No debe existir *interacción*.

Pueden darse tres casos:

- Ambos factores fueron diseñados como Modelo I (*Modelo I puro*).
- Ambos factores fueron diseñados como Modelo II (*Modelo II puro*).
- Uno de ellos como Modelo I y el otro como Modelo II (*Modelo Mixto*).

Esta clasificación permite plantear los modelos teóricos respectivos con:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{Modelo I de ANOVA de dos factores puro}$$

Donde:  $X_{ijk}$  : es el k-ésimo dato medido, del grupo j de un factor, del grupo i del otro.

$\mu$  : es la media Paramétrica de la población.

$\alpha_i$  : es la contribución fija del efecto del grupo i.

$\beta_j$  : es la contribución fija del efecto del grupo j.

$(\alpha\beta)_{ij}$  : es el efecto de la interacción de los factores A y B.

$\varepsilon_{ijk}$  : es el error de la medición k, en grupo i y en grupo j.

En este caso, el  $\varepsilon_{ijk}$  tiene una distribución normal de parámetros  $(0 ; \sigma^2)$ . Para el ejemplo anterior resulta que ambos términos fueron significativos. En el caso del factor A (aspirinas) el tiempo de alivio del dolor es menor entre los que la toman respecto de los que no lo hacen. Luego, la contribución fija ( $\alpha_i$ ) del efecto del factor A es significativa y constante para cada grupo. Por su parte los que toman café (factor B) se alivian más rápido que aquellos que no lo hacen. El hecho que el tiempo de alivio es mayor para los que no toman no es por azar, pues hay diferencias significativas entre los grupos sobre la base de los datos medidos en este experimento. Por lo tanto, la contribución fija ( $\beta_j$ ) del factor B es importante. Como hay interacción., o sea  $(\alpha\beta)_{ij}$  es significativa para el análisis de los hechos, denota que la combinación de ambos factores produce un alivio más rápido, y es un hecho que debe tomarse muy en cuenta. Como esta interacción es significativa no se cumple el quinto supuesto de los modelos de ANOVA, y para efectuar el análisis no queda más remedio que recurrir a modelos no paramétricos equivalentes.

Si se trata de un modelo II en ambos grupos la expresión anterior resulta ahora:

$$X_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (A.B)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{Modelo II de ANOVA de dos factores puro}$$

Donde:  $X_{ijk}$  : es el k-ésimo dato medido, del grupo j de un factor, del grupo i del otro.

$\mu$  : es la media Paramétrica de la población.

$A_i$  : es la contribución aleatoria del efecto del grupo i

$B_j$  : es la contribución aleatoria del efecto del grupo j.

$(A.B)_{ij}$  : es el efecto de la interacción de los factores i y j.

$\varepsilon_{ijk}$  : es el error de la medición k, en grupo j y en grupo i.

El término  $\varepsilon_{ijk}$  tiene una distribución normal de parámetros  $(0 ; \sigma^2)$ ; el término  $A_i$  tiene una distribución normal de parámetros  $(0 ; \sigma_a^2)$ ; el término  $B_j$  tiene una distribución normal de parámetros  $(0 ; \sigma_b^2)$  y el término de la interacción  $(AB)_{ij}$  tiene una distribución normal de parámetros  $(0 ; \sigma_{axb}^2)$ . Para el tercer caso, de modelo mixto, se trata de un modelo análogo a los dos de más arriba, donde uno de los efectos será una constante para todo el grupo y el otro aleatorio. Por su parte, si no hay repetición sólo se necesitan los cuatro primeros supuestos, ya vistos para el caso de ANOVA de un factor, pues no es posible detectar la interacción cuando hay un solo valor, para cada caso de combinación de factores como se trata en el siguiente punto.

## 20.3 ANOVA de dos factores sin repetición

A menudo resulta demasiado caro o difícil medir más de un dato por lugar, o bien, las mediciones arrojan valores tan parecidos, que resulta innecesario repetirlas. Ahora la suma de cuadrados entre los grupos, se particiona en dos términos, uno para cada grupo, pues no hay interacción. La diferencia entre estas dos sumas y la total corresponde la suma de cuadrados remanente o error (dentro de los grupos). En los modelos teóricos no aparece el término debido a la interacción y lo demás es similar. Se necesitan los primeros cuatro supuestos básicos y los cálculos matemáticos para hallar la tabla de ANOVA son similares. Entonces, parece más práctico tomar directamente un ejemplo para ilustrar estos modelos, como se muestra a continuación:

**Tabla 20.3: Modelo Mixto de ANOVA bifactorial sin repetición.**

FACTOR B	Dosis	FACTOR A				$\Sigma$
		Marca 1	Marca 2	Marca 3	Marca 4	
	1	71,4	72,0	73,8	74,4	291,6
	2	67,8	67,2	68,7	69,6	273,3
	3	66,6	66,3	66,3	66,6	265,8
	4	63,6	65,4	63,0	63,6	255,6
	5	55,2	57,9	57,0	56,4	226,5
	6	40,5	43,2	42,6	41,4	167,7
	7	29,4	29,7	31,2	28,8	119,1
	8	18,0	18,0	18,9	18,9	73,8
	9	17,4	17,7	18,0	17,4	70,5
	10	16,8	16,8	16,5	16,8	66,9
	$\Sigma$	446,7	454,2	456,0	453,9	1810,8

En la Tabla 20.3 se muestran los datos de un experimento donde se prueban 4 tipos de marcas comerciales existentes en el mercado, elegidas al azar entre los 15 antibióticos del mismo estilo disponibles para el público. Se planifican 10 dosis diferentes a ser administradas, de menor a mayor concentración, a pacientes de cierta infección. Y se mide el tiempo que tardan en curar. Como las marcas (factor A) fueron elegidas aleatoriamente, pero no las dosis (factor B), se tiene un Modelo Mixto de Anova de 2 factores sin repetición. El cual se resuelve como sigue:

*Paso 1)* Se calcula la suma total de datos  $T = \sum_1^a \sum_1^b X_{ij} = 1.810,8$

*Paso 2)* Se calcula la suma del cuadrado de todos los datos:

$$T_x^2 = \sum_1^a \sum_1^b X_{ij}^2 = (71,4)^2 + (67,8)^2 + \dots + (16,8)^2 = 101.077,02$$

*Paso 3)* Se calcula la suma de los cuadrados de las columnas, dividido por el tamaño muestral respectivo (en este caso  $b = 10$ ):

$$T_a^2 = \sum_1^a T_i^2 / b = (1/b) \sum_1^a T_i^2 = (1/10)[(446,7)^2 + (454,2)^2 + (456)^2 + (453,9)^2] = 81.979,97$$

*Paso 4)* Se calcula la suma de los cuadrados de las filas, dividido por el tamaño muestral respectivo (en este caso  $a = 4$ ):

$$T_b^2 = \sum_1^b T_j^2 / a = (1/a) \sum_1^b T_j^2 = (1/4)[(291,6)^2 + (273,3)^2 + \dots + (66,9)^2] = 101.051,78$$

*Paso 5)* Se calcula el término de corrección  $T^2 / N = (1.810,8)^2 / 40 = 81.974,92$

*Paso 6)* Se calcula la suma de cuadrados total con:

$$SS_t = T_x^2 - (T^2 / N) = \text{Paso 2} - \text{Paso 5} = 101.077,02 - 81.974,92 = 19.102,1$$

*Paso 7)* Se calcula la suma de cuadrados entre columnas (factor A) con:

$$SS_A = T_a^2 - (T^2 / N) = \text{Paso 3} - \text{Paso 5} = 81.979,97 - 81.974,92 = 5,05$$

*Paso 8)* Se calcula la suma de cuadrados entre filas (factor B) con:

$$SS_B = T_b^2 - (T^2 / N) = \text{Paso 4} - \text{Paso 5} = 101.051,78 - 81.974,92 = 19.076,86$$

*Paso 9)* Se calcula la suma de cuadrados residual (error) con:

$$SS_{\text{error}} = SS_t - SS_A - SS_b = \text{Paso 6} - \text{Paso 7} - \text{Paso 8}$$

$$SS_{\text{error}} = 19.102,1 - 5,05 - 19.076,86 = 20,19$$

Paso 10) Se arma la Tabla de ANOVA como calculando el estadígrafo F como cociente entre los dos MS respecto del MSerror o remanente. Por su parte los grados de libertad son  $a - 1 = 3$  para los días,  $b-1 = 9$  para las profundidades y  $a \cdot b = 27$  para el error. Los valores de SS se sacan de los pasos anteriores y así:

**TABLA DE ANOVA**

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Entre columnas (A)	5,05	(a-1)=3	1,68	2,25 (ns)
Entre filas (B)	19.076,86	(b-1)=9	2.119,65	2.833,8***
Dentro grupos (error)	20,19	(N+1-a-b) =27	0,748	
Total	19.102,1	39		

El cálculo de los grados de libertad es sencillo. Se resta 1 de la cantidad de grupos a y b para poder obtener los grados de libertad respectivos, en este caso resultan ser 3 y 9 respectivamente. El número total de grados de libertad es  $N-1 = 39$ . Y si se le restan los dos anteriores se obtienen los grados de libertad dentro de las muestras o error:  $39-9-3 = 27$  o  $40+1-4-10 = 27$ .

Hay diferencias altamente significativas entre filas, es decir, el tiempo de cura disminuye a medida que aumenta la dosis. No se detectan diferencias entre las diferentes marcas comerciales porque usan similares componentes activos, por lo que no hace falta calcular la componente añadida de varianza.

Una aplicación frecuente de este modelo sin repetición es el *test repetido de los mismos individuos*, en el cual analiza en forma repetida al mismo grupo de individuos a lo largo de un período de tiempo. Estas personas se escogen en forma aleatoria y sirven como repetición, por eso a este factor se lo diseña como Modelo II. En cambio, el factor tiempo se lo considera como efecto fijo del tratamiento y se lo diseña como Modelo I. Este tipo de test considera que las respuestas de los diferentes individuos son paralelas en el tiempo, se supone entonces que no hay interacción entre el tiempo y los individuos, cuando se trata de hallar la componente añadida de varianza debida al factor aleatorio. Por ejemplo, si se trata de medir el crecimiento de los individuos en períodos fijos de tiempo, o cuando se estudia la aparición de alguna respuesta posterior a un tratamiento aplicado al mismo grupo de personas en experimentos fisiológicos o psicológicos.

Otros usos muy difundidos son: el estudio del crecimiento en términos de inmunidad, después de la aplicación de antígenos, la alteración de respuestas a consecuencia de un tratamiento y las medidas de aprendizaje luego de un cierto número de experimentos. La idea básica en los modelos de más de un factor es poder separar la variabilidad entre grupos, en tantos términos como factores de análisis se usen. De esta forma, se puede tener un panorama más completo y simplificar los experimentos, reduciendo el costo y el tiempo de manera conveniente. Un avance grande, si se piensa en el clásico modelo Student de dos muestras.



## 20.4 Modelo de bloques aleatorizados

Este tipo de modelos de dos factores se aplica frecuentemente en la investigación agrícola, pero también en otros campos biológicos y en experimentos de laboratorio. Por ejemplo, cuando se aplica un fertilizante a una parcela, se obtiene una medida expresada como el producto de la cosecha, o bien, el sembrar en diferentes tipos de suelo. Análogamente, se puede medir el aumento de peso si se suministra a los animales de cría diferentes tipos de alimento balanceado, o bien, si se consideran diferentes razas para determinar su rendimiento. Para ilustrar el uso de este modelo se eligió su aplicación más frecuente ilustrada en la Figura 20.2 siguiente:

**Figura 20.2: Bloques aleatorizados en un campo.**

B	A	E	D	C	Bloque 1
B	C	E	D	A	Bloque 2
D	B	E	A	C	Bloque 3
C	B	A	E	D	Bloque 4

Un terreno ha sido subdividido en cuatro parcelas (bloques) de similares características dentro de cada una de ellas como por ejemplo, el tipo de suelos, la inclinación del terreno, etc. A cada parcela se le aplican cinco tratamientos diferentes como ser, diferentes fertilizantes, tratamientos con insecticidas, etc. La idea es comprobar si se detectan diferencias significativas por el efecto de los fertilizantes (tratamiento) y para ello se necesitan por lo menos cinco terrenos útiles. Sin embargo, las cinco lecturas de las cosechas levantadas no dan una idea de las diferencias entre los fertilizantes. Por lo tanto, se necesitan repeticiones para poder obtener un término de error. En el ejemplo graficado se escogieron para ello cuatro parcelas. Entonces a cada parcela se la divide en cinco partes, una para cada fertilizante, y se sorteá el lugar donde será colocado cada uno de ellos. Los resultados se muestran arriba. Como regla general los terrenos dentro de cada parcela deben ser muy semejantes. Entonces, se puede investigar también las diferencias entre bloques para detectar cual tipo de terreno es el más conveniente. Así, el efecto del fertilizante se considera como fijo (Modelo I) y el de los terrenos como aleatorio (Modelo II). Luego, el modelo teórico para este tipo de diseño será:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + B_j + \varepsilon_{ij} \quad \text{Modelo de ANOVA para los bloques aleatorizados}$$

Donde:  $X_{ij}$  : es el i-ésimo dato medido, del grupo j.

$\mu$  : es la media Paramétrica de la población.

$\alpha_i$  : es la contribución fija del efecto del grupo i (fertilizantes)

$B_j$  : es la contribución aleatoria del efecto del grupo j. (terrenos)

$\varepsilon_{ij}$  : es el error de la medición i-ésima del grupo j.

Los cálculos y Tabla de ANOVA son semejantes a los vistos más arriba, cuando no hay interacción. En el ejemplo siguiente se ilustra el uso de este modelo. En la Figura 20.3 se mues-

tran los datos de una cosecha de soja, medida en kilos, donde se han empleado 3 fertilizantes en 4 tipos de parcelas de terreno diferentes, caracterizadas por tener distintos tipos de suelos, con diferentes pendientes. Cada parcela se escogió de la forma más homogénea posible y se realizó un sorteo para repartir los fertilizantes dentro de cada una.

**Figura 20.3: Bloques aleatorizados en un campo.**

925(C) 958(A) 986(B) Bloque 1

971(A) 1051(B) 952(C) Bloque 2

891(B) 829(C) 927(A) Bloque 3

955(C) 1010(B) 971(A) Bloque 4

FACTOR B bloques (terrenos)	FACTOR A fertilizantes			Σ
	A	B	C	
1	958	986	925	2869
2	971	1051	952	2974
3	927	891	829	2647
4	971	1010	955	2936
Σ	3827	3938	3661	11426

1) Se calcula la suma total de datos  $T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b X_{ij} = 11.426$

Paso 2) Se calcula la suma del cuadrado de todos los datos:

$$T_x^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b X_{ij}^2 = (958)^2 + (971)^2 + \dots + (955)^2 = 10.914.748$$

Paso 3) Se calcula la suma de los cuadrados de las columnas, dividido por el tamaño muestral respectivo (en este caso  $a = 4$ ):

$$T_a^2 = \sum_{i=1}^a T_i^2 / a = (1/a) \sum_{i=1}^a T_i^2 = 10.889.173$$

Paso 4) Se calcula la suma de los cuadrados de las filas, dividido por el tamaño muestral respectivo (en este caso  $b = 3$ ):

$$T_b^2 = \sum_{j=1}^b T_j^2 / b = (1/b) \sum_{j=1}^b T_j^2 = 10.900.847$$

Paso 5) Se calcula el término de corrección  $TC = T^2 / N = (11.426)^2 / 12 = 10.879.456$

Paso 6) Se calcula la suma de cuadrados total con:

$$SS_{St} = T_x^2 - TC = \text{Paso 2} - \text{Paso 5} = 35.292$$

Paso 7) Se calcula la suma de cuadrados entre columnas (factor A) con:

$$SS_A = T_a^2 - (T^2 / N) = \text{Paso 3} - \text{Paso 5} = 9.717$$

Paso 8) Se calcula la suma de cuadrados entre filas (factor B) con:

$$SS_B = T_b^2 - (T^2 / N) = \text{Paso 4} - \text{Paso 5} = 21.391$$

Paso 9) Se calcula la suma de cuadrados residual (error) con:

$$SS_{\text{error}} = SS_{St} - SS_A - SS_b = \text{Paso 6} - \text{Paso 7} - \text{Paso 8} = 4.184$$

Paso 10) Se arma la Tabla de ANOVA como sigue:

**TABLA DE ANOVA**

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Entre columnas (A)	9.717	(A-1)=2	4.858	6,97*
Entre filas (B)	21.391	(B-1)=3	7.130	10,23**
Dentro grupos (error)	4.184	(N-A-B+1)=6	697	
Total	35.292	11		

Hay diferencias significativas entre columnas, esto es entre los diferentes tipos de fertilizantes probados. Para continuar este análisis hay que efectuar las comparaciones múltiples con el método de Tukey. Mientras que entre las filas existen diferencias muy significativas, por lo que hay que calcular la componente añadida de varianza  $\sigma_B^2$ .

$$\sigma_B^2 = \frac{b(a-1)MS_{\text{error}} + (b-1)MS_B}{ab-1} = (1/11)(8 \times 697 + 3 \times 7.130) = 2.451,45$$

La eficiencia relativa de la varianza error de los bloques aleatorizados completos  $\sigma_B^2$ , con respecto a la variabilidad remanente o error  $MS_{\text{error}}$ , puede obtenerse con la relación siguiente:

$$\sigma_B^2\% = \frac{\sigma_B^2}{MS_{\text{error}}} \cdot 100 = (2.451 / 697) \cdot 100 = 351,6\%$$

Esto significa tener una variabilidad debida a las diferencias entre los tipos de terreno, donde se hizo el experimento, tres veces y media mayor que la inexplicada debida al error.

## 20.5 Modelo no paramétrico de Friedman

Este modelo es de tipo no paramétrico para el caso de los bloques aleatorizados en un ANOVA de dos factores sin repetición. Estos *tests* son para diseños que si fuesen realizados mediante un ANOVA serían Modelo I para un factor, mientras que el otro representa los bloques en el experimento. Para un test que se basa en magnitudes ordinales no sería apropiado un diseño del tipo Modelo II que calcule las componentes añadidas de varianza, pues solo interesa la “localización” de las diversas muestras, dentro de la ordenación total.

Para ver el procedimiento del Modelo de Friedman, se usaran los mismos datos de la medición de cuatro marcas de antibióticos elegidas al azar de entre las disponibles en el mercado, vistos en la Tabla 20.3 anterior:

*Paso 1)* Se ordenan los datos dentro de cada bloque (marcas) y se calculan los rangos:

FACTOR B	Dosis	FACTOR A				Σ Rij
		Marca A	Marca B	Marca C	Marca D	
	1	10	10	10	10	40
	2	9	9	9	9	36
	3	8	8	8	8	32
	4	7	7	7	7	28
	5	6	6	6	6	24
	6	5	5	5	5	20
	7	4	4	4	4	16
	8	3	3	3	3	12
	9	2	2	2	2	8
	10	1	1	1	1	4

Como se puede ver, la regularidad de los rangos hallados se debe a la variación uniforme del tiempo de cura, a medida que la dosis aumenta.

*Paso 2)* Para cada fila se suman los rangos respectivos, y los totales Rij se colocan en la última columna.

*Paso 3)* Se calcula el estadígrafo  $\chi^2$  con:

$$\chi^2 = \left\{ \left[ \frac{12}{ab(a+1)} \right] \sum_i \left( \sum_j R_{ij} \right)^2 \right\} - 3b(a+1) = \frac{12}{10(4)(10+1)} (40^2 + 36^2 + \dots + 4^2) - 3(4)(10+1)$$

$$\chi^2 = (12/440) \cdot 6.160 - 132 = 36 ***$$

Este valor hay que compararlo con el de tablas  $\chi^2_{0.001; 9} = 27,877$  resultando ser altamente significativo, como era de esperar de acuerdo al análisis anteriormente realizado.

## 20.6 Sensibilidad de los modelos de ANOVA

Otra de las reglas de oro en el diseño de los experimentos dice: *Cuanto más factores se tomen en cuenta en el análisis de los datos, mayor será la sensibilidad alcanzada para detectar las diferencias buscadas.* La estrategia de los modelos de Anova es tratar de descomponer la variabilidad dentro de las muestras (error) lo más posible. Así, cuando se toma un solo factor se tiene la variabilidad total descompuesta en dos términos: entre las muestras y dentro de las mismas. Pero si se toma en cuenta un segundo factor con los mismos datos, ahora la variabilidad dentro de las muestras se descompone en dos términos: una debida al nuevo factor y un nuevo remanente al que se lo denomina error. Esto hace que el error se haga más chico y por lo tanto la sensibilidad del modelo aumenta. Aún más, si el segundo factor se toma con repetición el error se achica todavía más porque hay que descomponerlo en otros dos términos: uno para la interacción y el nuevo remanente (error) que será menor que el anterior. Análogamente, si se toman más de dos factores y con repetición el error seguirá disminuyendo.

Para ilustrar lo anterior se pueden usar los datos de mediciones de antibiogramas vistos en el punto 17.3.3, donde se deseaba averiguar si el factor humano tenía influencia en los resultados obtenidos. Ahora, se van a emplear dos factores, el factor A: los 4 tipos de antibióticos usados en los 6 pacientes (columnas) y el factor B: los 3 operadores del laboratorio (filas). Lo que se hace ahora es tomar los tipos de antibióticos como el segundo factor. No es necesario hacer ningún estudio estadístico para saber que habrá diferencias significativas entre los diámetros del halo de inhibición de los antibióticos. Cabría preguntarse entonces: ¿Cuál es el motivo para incluir el segundo factor si ya se sabe el resultado? La respuesta es seguir la regla de oro y tomar en cuenta todos los factores posibles para disminuir el error remanente y tener así una mayor sensibilidad para estudiar lo que realmente interesa que es el factor humano. En la primer resolución de este problema no se pudieron detectar diferencias entre los tres operadores, pero ahora, las cosas cambian como se verá a continuación: El estudio se hace sobre cultivos de *E.Coli* usando 6 cepas distintas y se mide es el diámetro del halo de inhibición de cuatro antibióticos:

CTX : cefotaxima  
AKN : amicacina

CAZ: ceftazidima  
GEN : gentamicina

Los 24 diámetros usados fueron medidos por tres operadores diferentes quienes usaron la manera usual que tienen de hacer la tarea. La idea es que si se llegan a detectar diferencias significativas entre ellos (como ocurrió) entonces, se deberá buscar la manera de estandarizar el procedimiento de lectura escribiendo un protocolo específico para ello. De esa forma, se evitará la incidencia del factor humano en los resultados informados por el laboratorio para los antibiogramas. Los valores que siguen son reales y fueron obtenidos por tres bioquímicos del curso de postgrado:

$$\text{Paso 1) Se calcula la suma total de datos } T = \sum_1^a \sum_1^b \sum_1^n X_{ijk} = \sum_1^a \sum_1^b T_{jk} = \sum_1^a T_c = 1.875$$

Paso 2) Se calcula la suma del cuadrado de todos los datos:

$$T_x^2 = \sum_1^a \sum_1^b \sum_1^n X_{ijk}^2 = 50.459$$

**Tabla 20.3: 6 Antibiogramas medidos por 3 operadores con 4 antibióticos distintos**

	CTX	CAZ	AKN	GEN	Σ
<b>1</b>	27	27	20	18	
	32	30	22	20	
	30	28	22	21	
	29	30	20	18	
	30	32	22	20	
	35	30	23	20	
Σ	183	177	129	117	<b>606</b>
<b>2</b>	30	24	22	22	
	30	30	22	24	
	30	30	23	23	
	30	30	23	20	
	30	30	24	24	
	30	30	25	22	
Σ	180	174	139	135	<b>628</b>
<b>3</b>	30	26	19	22	
	31	32	22	21	
	32	30	22	21	
	36	36	22	19	
	34	31	25	24	
	30	29	24	23	
Σ	193	184	134	130	<b>641</b>
<b>Σ Σ</b>	<b>556</b>	<b>535</b>	<b>402</b>	<b>382</b>	<b>1875</b>

Fuente: Dras. Cech N.; Coschiza M. y Lodeiro N.

*Paso 3)* Se calcula la suma de los cuadrados de los totales de las combinaciones de factores, dividido por el tamaño muestral respectivo ( $n = 6$ ).

$$T_c^2 = \sum_1^a \sum_1^b T_{jk}^2 / n = (1/n) \sum_1^a \sum_1^b T_{jk}^2 = 50.222$$

*Paso 4)* Se calcula el término de corrección  $T^2 / N = (1.875)^2 / 72 = 48.828$

*Paso 5)* Se calcula la suma de los cuadrados de los totales del grupo B (operadores) y se divide por su tamaño muestral respectivo, con  $a = 4$  y  $n = 6$ .

$$T_b^2 = \sum_1^a \sum_1^n T_{ik}^2 / a.n = 48.854$$

*Paso 6)* Se calcula la suma de los cuadrados de los totales del grupo A (antibióticos) y se divide por su tamaño muestral respectivo, con  $b = 3$  y  $n = 6$ .

$$T_a^2 = \sum_1^b \sum_1^n T_{ik}^2 / b.n = 50.161$$

Paso 7) Se calculan las sumas de cuadrados necesarias

$$SS_{total} = T_x^2 - T^2 / N = Paso 2 - Paso 4 = 1.631$$

$$SS_{dentro} = T_x^2 - T_c^2 = Paso 2 - Paso 3 = 237$$

$$SS_{filas} = T_b^2 - T^2 / N = Paso 5 - Paso 4 = 26 \text{ (operadores)}$$

$$SS_{columnas} = T_a^2 - T^2 / N = Paso 6 - Paso 4 = 1.332 \text{ (antibióticos)}$$

$$SS_{interacción} = T_c^2 + (T^2 / N) - T_b^2 - T_a^2 = (Paso 3 - Paso 4) - SS_{filas} - SS_{columnas} = 36$$

La suma de cuadrados total, sigue siendo la suma de las sumas de cuadrado entre y dentro de los grupos. Aquí, la suma de cuadrados entre se descompone en tres términos: una debida al grupo A, otra al grupo B y la última debida a la interacción. Entonces:

$$SS_{total} = (SS_{filas} + SS_{columnas} + SS_{interacción}) + SS_{dentro}$$

Paso 8) Se calcula el cuadro de ANOVA como sigue:

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Entre Filas (operadores)	26	(b-1)=2	13	3,3*
Entre columnas(antibióticos)	1.332	(a-1)=3	444	112,4****
Interacción	36	(a-1)(b-1)=6	6	1,5 (ns)
Dentro grupos (error)	237	a.b(n-1)=60	3,95	
Total	1.631	71		

Notar que ahora se descubren diferencias significativas entre los 3 operadores, cosa que no se podía detectar con el modelo de un factor usado antes. El valor del  $SS_T = 1.631$  es el mismo para los dos modelos empleados. En el de un factor se descompone en dos términos  $SS_{entre}$  los operadores que vale 26 y el remanente por el error es  $SS_{dentro} = 1.605$ . En cambio, en el de dos factores el remanente se reduce a 237, lo que le da mayor sensibilidad al modelo. Lo que ocurre es que al tomar un segundo factor en cuenta, ahora se tiene una mejor explicación del fenómeno. Lo que antes era el remanente de 1.605, ahora se descompone en tres términos: uno debido al efecto de los antibióticos empleados  $SS_a = 1.332$ , otro debido a la interacción entre ambos factores  $SS_i = 36$  y el nuevo remanente de 237 ( $1.605 = 1.332 + 36 + 237$ ). Por su parte, también se descomponen los grados de libertad:  $69 = 3 + 6 + 60$ ; pero el valor relevante para el error no baja tanto como el valor  $SS$  y por eso el  $MS_{error}$  baja de 23,3 a 3,95. Entonces, al efec-

tuar el cociente para determinar el valor del estadígrafo F como el denominador sigue igual, pero el denominador se achica en casi seis veces ahora resultó ser significativo. Esto es, ahora puede detectar las pequeñas diferencias existentes entre los tres operadores.

Si se continúa el análisis usando comparaciones múltiples con el modelo de Tukey se obtienen los resultados siguientes:

	Operador 1	Operador 2	Operador 3
<b>LI i</b>	24,536	25,5	25,994
<b>Promedio</b>	25,25	26,2	26,71
<b>LS i</b>	25,964	29,9	27,423

Se descubre que no hay diferencias entre el operador 1 y el 2, ni entre el operador 2 y el 3. Las diferencias, se encuentran entre los operadores 1 y 3. Investigado el asunto, se descubrió que mientras el primero medía radios usando un punto imaginario en el centro del disco con el anti-biótico, los otros dos medían siempre los diámetros directamente. Como conclusión, se modificó el protocolo de la técnica de la manera siguiente: “Se deben medir los diámetros siempre que se pueda. Sólo cuando la superposición entre los halos sea muy grande y los valores estén cerca de los críticos, se usará la medición de los radios, pero repitiendo esto por lo menos 3 veces y en diferentes posiciones promediando los resultados”.

Como conclusión final se puede ver la practicidad de tomar todos los factores posibles en cuenta, aún cuando alguno pueda parecer inútil. La reducción de la variabilidad remanente (error) puede hacer detectar diferencias que de otra manera permanecerían ocultas como en el ejemplo visto. No siempre ocurrirá esto, pero el agrandar un poco los cálculos con la misma inversión efectuada para realizar las mediciones, siempre justifica el aumento de sensibilidad de los modelos de ANOVA.

## 20.7 Problemas propuestos

1) Marcar la respuesta correcta a cada una de las afirmaciones siguientes, o completar la frase:

- |   |          |          |
|---|----------|----------|
| 1) El ANOVA de dos factores puede ser con o sin repetición                            | <b>V</b> | <b>F</b> |
| 2) Los modelos con repetición permiten analizar mejor los datos.                      | <b>V</b> | <b>F</b> |
| 3) Los 5 supuestos básicos para estos modelos son: .....                              |          |          |
| 4) Los modelos con repetición permiten detectar el fenómeno de interacción.           | <b>V</b> | <b>F</b> |
| 5) Explicar la diferencia entre modelos encajados de dos niveles y estos:.....        |          |          |
| 6) Para reconocer un encajado se debe mirar si hay o no repetición.                   | <b>V</b> | <b>F</b> |
| 7) Hay tres modelos posibles que son:.....  |          |          |
| 8) El modelo teórico puro o mixto se puede plantear con:.....                         |          |          |
| 9) El primer paso para calcular este ANOVA es calcular la suma de cuadrados.          | <b>V</b> | <b>F</b> |
| 10) Se requiere del valor promedio grupal para poder compararlos entre sí.            | <b>V</b> | <b>F</b> |
| 11) El término cuadrático para cada factor, se calcula sumando el cuadrado del total. | <b>V</b> | <b>F</b> |
| 12) Explicar como se obtienen las SS necesarias para la Tabla de ANOVA:.....          |          |          |
| 13) La SS entre las muestras se descompone en dos términos, uno por factor.           | <b>V</b> | <b>F</b> |
| 14) La SS total es la suma de las SS dentro y entre las muestras.                     | <b>V</b> | <b>F</b> |



- 15) Cada MS se calcula dividiendo los SS por sus respectivos grados de libertad. V F
- 16) Presentar una Tabla de ANOVA en forma genérica:.....
- 17) Los estadígrafos F para cada factor son el cociente de sus MS respecto de MSerror V F
- 18) Cuando se detecta interacción significativa, se deje de cumplir un supuesto básico. V F
- 19) Una sinergia es una interacción de tipo negativa. V F
- 20) Explicar el concepto de interferencia y sinergia:.....
- 21) Un modelo I puro tiene en ambos factores un diseño del tipo Modelo I. V F
- 22) Un modelo mixto debe tener el segundo factor como modelo II. V F
- 23) Explicar como se diseña un experimento con los modelos teóricos posibles:.....
- 24) La idea básica de estos modelos es descomponer la variación total en partes. V F
- 25) Explicar un diseño experimental con bloques aleatorizados:.....
- 26) En los bloques aleatorizados se puede detectar la interacción. V F
- 27) El modelo no paramétrico equivalente a los bloques es el de Kruskal-Wallis. V F
- 28) El modelo de Friedman se puede usar en casos con repetición. V F
- 29) El diseño con un Modelo II es el más apropiado para el modelo de Friedman. V F
- 30) Explicar resumidamente el modelo no paramétrico de Friedman:.....

2) Hacer un esquema que muestre un resumen de todos los modelos vistos hasta ahora, para una , dos y más muestras; con uno o más factores en el caso paramétrico.

3) Agregar al esquema anterior los modelos no paramétricos equivalentes.

4) Discutir acerca de las ventajas y desventajas de cada uno de los modelos vistos, sus supuestos básicos y su campo de aplicación.

5) Armar un cuadro sinóptico que muestre en forma simplificada como se deben usar todos los modelos estadísticos vistos hasta ahora, para el caso de tener que trabajar con una sola magnitud clínica, y agregando los comentarios pertinentes a un costado.

6) En un laboratorio de análisis se desean comparar entre sí a tres técnicas para la determinación de Glucosa, elegidas expresamente para ello. Así se obtiene suero de tres pacientes escogidos al azar entre los concurrentes diarios. El suero de cada paciente se fracciona en 9 alícuotas iguales. Para probar cada técnica se eligen al azar a tres muestras de suero de cada uno. Los veintisiete valores medidos se vuelcan en la tabla siguiente.

Paciente	Técnica		
	1	2	3
A	0,98	0,99	1,13
	1,01	0,95	1,07
	0,98	1,01	1,07
B	0,92	0,91	1,03
	0,86	0,9	1,07
	0,92	1,01	1,02
C	0,84	0,86	0,98
	0,79	0,79	1,01
	0,8	0,81	1,01

Se desea averiguar:

- a) Si hay diferencias entre las 3 técnicas analizadas.
- b) En caso de encontrarlas usar un modelo apropiado para las comparaciones múltiples.
- c) Interesa determinar la componente añadida de varianza entre los pacientes.

7) Un farmacéutico a cargo de una cadena comercial con seis sucursales, escoge al azar tres días de un bimestre, y busca el total de ventas del día para cada caso seleccionado. Los datos los vuelca en una tabla como la siguiente.

FACTOR B (Sucursal)	FACTOR A (días)		
	05/06/00	15/07/00	23/06/00
1	250	280	267
2	340	335	320
3	290	280	240
4	500	568	520
5	180	190	182
6	380	400	390

Se pide calcular:

- a) Si hay diferencia significativa entre las sucursales.
- b) Si hay diferencia significativa entre los días.
- c) Como no sabe si se cumplen además de el modelo de ANOVA de dos factores adecuados, volver a resolver el problema con un modelo no paramétrico.